

第一课：等离子体的流体特性

李 晖

国家空间科学中心

hli@nssc.ac.cn

2025-11-21

目 录

- ## 4 作业



李 晖

作业

3 / 52

前半个学期，已经学习了单粒子轨道理论、等离子体动力学方程、等离子体输运过程、等离子体波动。磁流体力学部分的课程安排：

- 1 等离子体的流体特性 (11 月 21 日)
- 2 磁流体静力学 (11 月 28 日)
- 3 磁场对流、扩散与重联 (12 月 05 日)
- 4 磁流体力学波动 (12 月 12 日)
- 5 间断面与激波 (12 月 19 日)
- 6 磁流体动力学不稳定性 (12 月 26 日)
- 7 习题讲解和复习 (01 月 02 日)
- 8 期末考试 (01 月 09 日)



李 暉

作业

4 / 52

基础知识: 电磁学、电动力学、热力学与统计物理、流体力学……

讲义下载: www.swl.ac.cn/hli/MHD_note.html, 国科大课程网站

课程成绩：平时作业 40%，期末考试 40%，出勤 20%，加分（≤5 分，互动、课件改进…）

考试方式：半闭卷考试（允许带一张 A4 纸，内容自定）

互相认识：介绍一下自己（本科学校、研究所、研究方向…）





如何认知等离子体现象

磁流体力学
(MHD)

李 晖

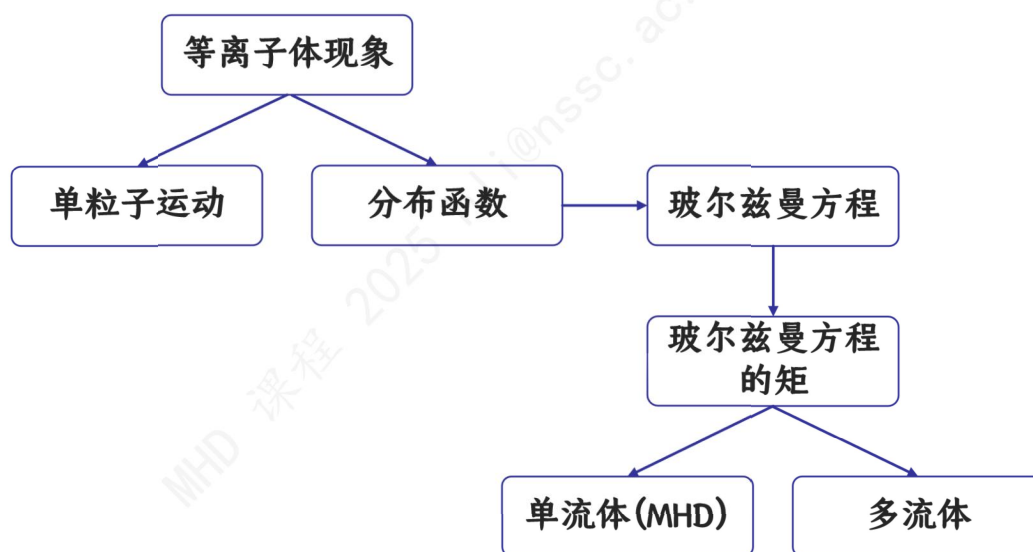
前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

5 / 52



Navigation icons: back, forward, search, etc.



三大理论框架

磁流体力学
(MHD)

李 晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

6 / 52

以单粒子轨道理论为起点，以动理学统计理论为微观基础，通过流体近似过渡到宏观描述，三者相互补充，共同解释从实验室等离子体到天体现象的复杂行为。

单粒子轨道（单个粒子描述）：将稀薄等离子体视为大量独立带电粒子的集合，忽略粒子间相互作用，仅研究单个粒子在电磁场中的运动规律。控制方程：Lorentz 方程。

动理学理论（微观统计描述）：通过速度分布函数 $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 描述稠密等离子体在相空间的统计行为。控制方程：Boltzmann 方程、Vlasov 方程等（**Q：谁知道二者的区别？**）。

磁流体力学（宏观流体近似）：将稠密等离子体视为导电流体，研究其在电磁场中的运动规律以及相互作用，关注平衡态、宏观不稳定性及缓变过程。控制方程：磁流体力学方程组。**单流体**：假设电子和离子运动耦合，适用于高频响应。**多流体**：区分不同组分（如电子、离子），可描述双极扩散等效应。

磁流体力学，Magnetohydrodynamics = **M**agneto + **H**ydro + **D**ynamics (MHD)

Navigation icons: back, forward, search, etc.



MHD 的必要性和可行性

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

7 / 52

Navigation icons

等离子体运动学：带电粒子运动产生电磁场，而场又反作用于粒子运动。E 和 B 不能事先设定，由带电粒子的位置和运动共同决定。

追踪困境：典型等离子体而言，每立方厘米约 10^{12} 个离子-电子对。要逐一跟踪、精准预测等离子体的行为，堪比给全宇宙的星星建档，是一项不可能完成的任务。

幸运女神：逐个追踪通常并非必须，实际中大多数（80%）等离子体现象都可以用一个相当粗糙的流体模型来解释。

流体模型：忽略单个粒子特性，只考虑流体元运动。在等离子体中，流体包含电荷。

典型特征：普通流体（频繁碰撞一致行动）vs 等离子体（Coulomb 作用团结一心）



MHD 的发展历程

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

8 / 52

Navigation icons

MHD 的发展历程结合了理论突破、实验验证与工程应用，是一个多阶段演进的过程。

一、起源与早期探索（19 世纪初-20 世纪 30 年代）

- 1832 年：Faraday 首次提出磁流体力学问题，通过测量泰晤士河水流切割地磁场产生的电动势来测速，虽因技术限制未成功（Q：原因？），但该实验奠定了磁流体效应的物理基础。
- 1937 年：Hartmann 根据 Faraday 的想法，对水银在磁场中的流动进行定量实验，提出粘性不可压缩磁流体流动（Hartmann 流动）的理论计算方法，首次实现磁流体力学问题的定量分析。

真正的科学精神，不是“永远正确”，而是“永远好奇、永远探索”！



李 暉

作业

9 / 52

◀ ◻ ▶ ◀ 📄 ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

二、理论奠基与学科建立（20 世纪 40 年代）

- 1940-1948 年：瑞典物理学家 Alfvén 将 Maxwell 电动力学与 Navier-Stokes 流体力学结合起来，提出磁流体力学。在该框架下，等离子体在宏观上被描述为流体，而离子和电子的粒子性则被忽略。Alfvén 系统研究导电流体在磁场中的运动规律，发展了单粒子“引导中心”理论、磁冻结定理、磁流体动力学波和太阳黑子理论。他首次使用术语“Magnetohydrodynamics”，被视为学科的奠基人。1970 年，Alfvén 获得诺贝尔物理学奖。评奖委员会在贺词中写道：“由于磁流体力学方面基础性的工作和发现，以及在等离子体物理的不同分支上成果丰硕的应用”。
- 1950 年：Lundquist 首次探讨磁约束等离子体问题（磁流体静力学），为受控核聚变研究奠定基础。



李 暉

作业

10 / 52

◀ ◻ ▶ ◀ 📄 ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

三、学科拓展与工程应用兴起（1950-1960 年代）

- **受控核聚变**：20 世纪 50 年代起，磁约束聚变（如托卡马克装置）研究成为磁流体力学发展的核心动力，推动等离子体磁约束理论和技术突破。
- **航天应用**：Resler 与 Sears（1957）提出磁控气动力学（Magneto-aerodynamics），研究磁场对高超声速飞行器再入大气层时等离子体的控制（如减阻与热防护）。同时，电推进技术（离子推进器、等离子体推进器）开始用于卫星姿态控制。
- **工业技术**：1959 年，首次提出磁流体-蒸汽联合循环发电概念，研究聚焦超导磁场、耐高温电极材料等关键技术。Hartmann 于 1918 年发明的电磁泵在 1960 年代因快中子反应堆（液态钠冷却剂）需求得到广泛应用；冶金工业中磁场控制液态金属流动的技术逐步成熟。



MHD 的发展历程

磁流体力学
(MHD)

李 晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

四、多领域深化与现代发展（1970 年代至今）

- 理论完善与交叉：磁流体力学方程组与 Navier-Stokes 方程的耦合模型不断细化，计算磁流体力学推动复杂问题的数值求解。磁流体力学成为独立分支，涵盖天体物理、太阳与空间物理、核聚变能源、高超声速飞行和工业流体控制的交叉学科。
- 技术创新与挑战：如，航空工程中的磁流体冲压组合发动机、磁流体涡轮组合发动机、燃烧室后磁流体发电、表面磁流体发电、磁流体加速风洞、磁流体推力矢量、进气道大尺寸磁流体流动控制、边界层分离流动控制、边界层转换控制、飞行器头部热流控制等。

11 / 52

Navigation icons



目 录

磁流体力学
(MHD)

李 晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

1 前言

2 多元流体方程组

3 单流体方程组

4 作业

12 / 52

Navigation icons



MHD 方程组的推导

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

推导 MHD 方程组的常见方法一般有两类：

- **动理学矩方法**：从微观动理学方程（如 Boltzmann 方程）出发，通过对速度空间取矩（零阶矩、一阶矩、二阶矩等）逐步推导宏观流体方程。
- **宏观唯象方法**：直接耦合流体力学方程与电磁场方程，通过物理直觉构建方程组。流体部分基于 Navier-Stokes 方程，添加电磁力；电磁部分结合 Maxwell 方程组，在准中性假设和低频近似下忽略位移电流，简化 Ampère 定律；考虑方程组闭合。

为了便于理解，接下来我们主要从唯象方法来推导。

13 / 52

Navigation icons



1. 连续性方程

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

物质守恒定律：当存在粒子净通量穿过该体积的表面 S 时，体积 V 中的粒子总数 N 才会发生变化。粒子流密度为 $n\mathbf{u}$ ($\mathbf{u}$ 是粒子的平均速度)。根据 Gauss 散度定理，可得：

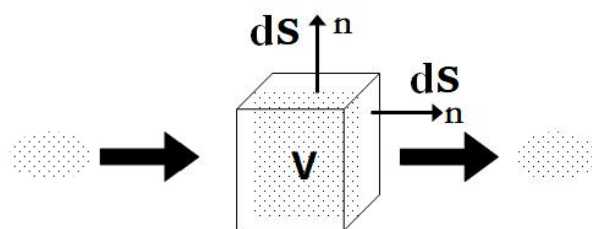
$$\frac{\partial N}{\partial t} = \int_V \frac{\partial n}{\partial t} dV = - \oint n\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \nabla \cdot (n\mathbf{u}) dV$$

Gauss 散度定理：

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot n dS$$

对任何体积都须成立，则**连续性方程**：

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0$$



14 / 52

Navigation icons



2. 运动方程

磁流体力学
(MHD)

李 晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

单粒子的运动方程如下：

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

首先忽略碰撞和热效应，流体元中所有粒子都以平均速度 $\mathbf{u}$ 运动，则：

$$nm \frac{d\mathbf{u}}{dt} = nq(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

d/dt 需在流体元的位置上测量，但这显然并不方便。我们希望空间固定的流体元方程（咖啡中奶油的演化为例）。根据**随体导数**，转换到固定位置坐标系：

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{G}$$

对于等离子体，我们将 $\mathbf{G}$ 视为流体速度 $\mathbf{u}$ ，则：

$$nm \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = nq(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

15 / 52

Navigation icons



2. 运动方程

磁流体力学
(MHD)

李 晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

考虑热运动时，上述公式右侧需添加压力项。压力由流体元内外粒子的随机运动引起，在单粒子方程中不会出现。右图中，流体元中心位于 $(x_0, \frac{1}{2}\Delta y, \frac{1}{2}\Delta z)$ 。

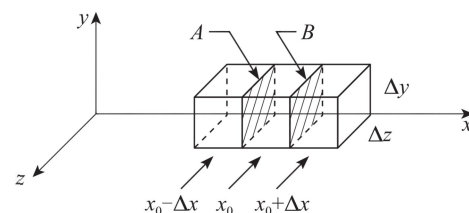
1) 简单起见，只考虑通过面 A 和 B 运动的 x 方向，以速度 v_x 通过面 A 的粒子数为：

$$\Delta n_v v_x \Delta y \Delta z$$

Δn_v 是单位体积内速度在 v_x 附近 Δv_x 范围内的粒子数：

$$\Delta n_v = \Delta v_x \iint f(v_x, v_y, v_z) dv_y dv_z$$

f 是**速度空间的分布函数**，表示速度处于 (v_x, v_y, v_z) 附近单位速度体积内的粒子数。



16 / 52

Navigation icons



17 / 52

$$P_{A^+} = m\Delta y\Delta z \int_0^\infty v_x^2 f dv_x \iint dv_y dv_z$$
$$n = \iiint f dv_x dv_y dv_z \qquad \langle v_x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 f dx \iint dv_y dv_z}{\iiint f dv_x dv_y dv_z}$$
$$P_{A^+} = \frac{1}{2} m \Delta y \Delta z [n \langle v_x^2 \rangle]_{x_0 - \Delta x}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡



18 / 52

$$P_{B^+} = \frac{1}{2} m \Delta y \Delta z [n \langle v_x^2 \rangle]_{x_0}$$
$$\begin{aligned} P_{A+} - P_{B+} &= \frac{1}{2} m \Delta y \Delta z \left[(n \langle v_x^2 \rangle)_{x_0 - \Delta x} - (n \langle v_x^2 \rangle)_{x_0} \right] \\ &= \frac{1}{2} m \Delta y \Delta z (-\Delta x) \frac{\partial}{\partial x} (n \langle v_x^2 \rangle) \end{aligned}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(nmv_x)\Delta x\Delta y\Delta z = -m\frac{\partial}{\partial x}(n\langle v_x^2\rangle)\Delta x\Delta y\Delta z$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ▶ ↺ 🔍 ↻



2. 运动方程

磁流体力学
(MHD)

李 晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

19 / 52

4) 将粒子速度 v_x 分解成**流体速度**和**随机热运动**两个部分: $v_x = u_x + v_{xr}$

对于一维 Maxwell 分布, $\frac{1}{2} m \langle v_{xr}^2 \rangle = \frac{1}{2} K T$ 。这样, $\langle v_x^2 \rangle = u_x^2 + K T / m$

然后

$$\frac{\partial}{\partial t} (n m u_x) = -m \frac{\partial}{\partial x} [n (u_x^2 + K T / m)]$$

重新组合一下

$$n m \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + m u_x \left(\frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = - \frac{\partial (n K T)}{\partial x}$$

考虑到连续性方程, $\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} n u_x = 0$, 最终

$$n m \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

Navigation icons



2. 运动方程

磁流体力学
(MHD)

李 晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

20 / 52

上面的公式就是通常的**压力梯度力**。

推广到三维的情况, 可以得到:

$$n m \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = - \nabla p$$

加入电磁力的项后, 最终我们得到:

$$n m \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = n q (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla p$$

Navigation icons



2. 运动方程

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

21 / 52

Navigation icons

上述推导只是一个特例：通过 x 方向的运动来传递 x 动量。假定流体是各向同性的，同样的结果在 y 和 z 方向也成立。

但也有可能通过 x 方向的运动来传递 y 方向的动量。假设粒子在 $x_0 - \Delta x$ 和 $x_0 + \Delta x$ 处的 y 动量为最大值，而在 x_0 处的 $v_y = 0$ 。那么穿过面 A 和 B 的粒子在 x_0 处带入流体元素的 y 动量将大于它们带出的动量，流体元素在 y 方向获得动量。

这种**剪切应力**不能用标量 p 表示，而必须用压力张量 $\mathbf{P}$ 来表示，其分量 $\mathbf{P}_{ij} = nm \langle v_i v_j \rangle$ 既指明了运动方向，也指明了所涉及的动量分量。

一般情况下，术语 $-\nabla p$ 由 $-\nabla \cdot \mathbf{P}$ 代替。 $\mathbf{P}$ 的非对角元素通常与粘度有关。



2. 运动方程

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

22 / 52

Navigation icons

如果存在中性气体，带电流体可通过碰撞与之交换动量。每次碰撞损失的动量将正比于流体和中性气体的相对速度 $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$ ，其中 $\mathbf{u}_0$ 是中性气体的速度。

如果碰撞的平均自由时间 τ 近似为常数，则产生的力可大致写成：

$$-nm(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)/\tau,$$

或者 $-\nu nm(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$ ，这里 ν 是碰撞频率。

包括各向异性压力和中性碰撞的运动方程可推广为：

$$nm \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = nq(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \mathbf{P} - \frac{nm(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)}{\tau}$$

当然，带电粒子之间的碰撞还不包括在内。



2. 运动方程

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

上述推导时，已暗中假定存在很多碰撞。比如之前用 Maxwell 速度分布来计算速度的平均值时就引入了这个假定，因为这种分布通常是频繁碰撞的结果。然而，我们只在计算速度的平均值时才用了该假定，那么任何一种具有同样平均值的分布都有类似结论。所以，流体理论对分布函数与 Maxwell 分布的偏离不是很敏感。

流体理论适用于等离子体的另一个原因是磁场和波粒相互作用在某种意义上可能起到碰撞的作用。比如，磁场迫使带电粒子以 Larmor 轨道回旋，也能限制粒子自由流动。特别是对于垂直于磁场的运动，流体理论是一种很好的近似。

23 / 52

Navigation icons



3. 状态方程

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

还需要一个方程来闭合方程组。为此，可以用将 p 和 n 关联起来的热力学状态方程。

$$p = C\rho^\gamma$$

其中 C 是常数， γ 是比热， C_p/C_v 。对上式两边取对数，接着取（梯度）微分，即

$$\frac{\nabla p}{p} = \gamma \frac{\nabla \rho}{\rho} = \gamma \frac{\nabla n}{n}$$

考虑到 $\rho = mn$ ，则状态方程为：

$$p_j n_j^{-\gamma} = \text{const}$$

24 / 52

Navigation icons



3. 状态方程

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

1) 等热压缩: $\nabla p = \nabla(nKT) = KT\nabla n \Rightarrow \gamma = 1$

2) 对于绝热压缩, KT 将会变化, 导致 $\gamma > 1$

$$\frac{\nabla n}{n} + \frac{\nabla T}{T} = \gamma \frac{\nabla n}{n} \Rightarrow \frac{\nabla T}{T} = (\gamma - 1) \frac{\nabla n}{n}$$

如果 N 是自由度, γ 可由下式得到

$$\gamma = (2 + N)/N$$

状态方程有效性要求热流可忽略, 也就是说导热系数很低。同样, 垂直于 B 的方向比平行方向更可能成立。幸运的是, 大多数基本现象都可以用上述粗略假设来充分描述。

25 / 52

Navigation icons



3. 状态方程

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

如果一个等离子体的压力张量是对角线的, 并且所有对角线元素的值都相同, $\mathbf{P} = p\mathbf{I}$, 那么它就被称为**各向同性**。

等离子体中的粒子分布通常是**各向异性**的。

磁化等离子体: 平行于磁场方向的粒子压力 ($p_{\parallel}$) 通常区别于垂直磁场方向的压力 ($p_{\perp}$), 那么

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} \end{pmatrix}$$

这两种压力都是与理想气体定律相关的动力学温度有关

$$p_{\perp} = nKT_{\perp}, \quad p_{\parallel} = nKT_{\parallel}$$

26 / 52

Navigation icons



多元流体方程组

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

简单起见，假设等离子体只有两种：离子和电子，很容易推广到更多种。电荷 (ρ_q) 和电流密度 ($\mathbf{j}$) 分别是：

$$\rho_q = n_i q_i + n_e q_e = e(-n_e + Zn_i)$$

$$\mathbf{j} = n_i q_i \mathbf{v}_i + n_e q_e \mathbf{v}_e = -en_e(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)$$

由于现在不考虑单粒子运动，我们用 $\mathbf{v}$ 代替 $\mathbf{u}$ 来表示流体速度。同时忽略碰撞和黏性。

因此，完整的方程组包括连续性方程、运动方程、状态方程和 Maxwell 方程组。

27 / 52

Navigation icons



多元流体方程组完整形式

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot (n_j \mathbf{v}_j) = 0 \quad j = i, e \quad (1)$$

$$n_j m_j \left[\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \cdot \nabla) \mathbf{v}_j \right] = n_j q_j (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}) - \nabla p_j - \frac{n_j m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k)}{\tau_{jk}} \quad (2)$$

$$p_j n_j^{-\gamma} = \text{const} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_q}{\epsilon_0} \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (7)$$

28 / 52

Navigation icons



多元流体方程组

磁流体力学
(MHD)

李 晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

16 个未知标量: $n_i, n_e, p_i, p_e, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_e, \mathbf{E}$, 和 $\mathbf{B}$ 。

每个矢量方程算作 3 个标量方程, 表面看有 18 个标量方程 (Q: 哪 18 个方程?)。

然而, Maxwell 方程中有 2 个是冗余的, 因为可从其他方程中推导出来。

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0 = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0 = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t}$$

16 个方程, 16 个未知数, 联立解出流体近似下自洽的场和运动。

多元流体系统描述往往过于复杂, 简化为单流体描述十分必要。

MHD 的适用条件: 仅适用于电荷分离 (例如等离子体振荡或等离子体中的电磁波) 可忽略不计时, 空间尺度大于德拜长度, 时间尺度大于等离子体频率的倒数。

29 / 52



目 录

磁流体力学
(MHD)

李 晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

1 前言

2 多元流体方程组

3 单流体方程组

4 作业

30 / 52



参数定义

磁流体力学
(MHD)
李晖

前言
多元流体方程组
单流体方程组
作业

假设等离子体由电子 ($m_e q_e = -e$) 和离子 ($m_i q_i = e$) 组成。在由电子和离子组成的双组分等离子体中, 我们将一些参数定义如下:

质量密度:

$$\rho_m = n_e m_e + n_i m_i$$

速度:

$$\mathbf{V} = \frac{n_e m_e \mathbf{v}_e + n_i m_i \mathbf{v}_i}{n_e m_e + n_i m_i}$$

电荷密度:

$$\rho_q = n_e q_e + n_i q_i$$

电流密度:

$$\mathbf{j} = n_i q_i \mathbf{v}_i + n_e q_e \mathbf{v}_e = -en_e(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)$$

总压:

$$p = p_i + p_e$$

31 / 52

Navigation icons



1. 连续性方程

磁流体力学
(MHD)
李晖

前言
多元流体方程组
单流体方程组
作业

对于双流体连续性方程 (1), 电子方程乘以 m_e , 离子方程乘以 m_i , 再相加:

$$m_e \frac{\partial n_e}{\partial t} + m_e \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0, \quad m_i \frac{\partial n_i}{\partial t} + m_i \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (m_i n_i + m_e n_e)}{\partial t} + \nabla \cdot (m_i n_i \mathbf{v}_i + m_e n_e \mathbf{v}_e) \\ &= \frac{\partial (m_i n_i + m_e n_e)}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(m_i n_i + m_e n_e) \frac{m_i n_i \mathbf{v}_i + m_e n_e \mathbf{v}_e}{m_i n_i + m_e n_e} \right] \end{aligned}$$

MHD 连续性方程:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{V}) = 0$$

物理内涵: 在经典非相对论等离子体中, 流体密度 n 随质心速度 $\mathbf{V}$ 流动, 质量守恒。

32 / 52

Navigation icons



2. 电荷守恒方程

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

对于双流体连续性方程 (1), 电子方程乘以 q_e , 离子方程乘以 q_i , 则:

$$q_e \frac{\partial n_e}{\partial t} + q_e \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0, \quad q_i \frac{\partial n_i}{\partial t} + q_i \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) = 0$$

再把两个方程相加, 则**电荷守恒方程**:

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

33 / 52

Navigation icons



3. 运动方程

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

对于双流体运动方程 (2), RHS:

$$\sum_j \{ n_j q_j (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}) - \nabla p_j + \mathbf{F}_{jk} \} = \rho_q \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla (p_e + p_i)$$

由于 $\mathbf{F}_{ei} = -\mathbf{F}_{ie}$, 所有没有净摩擦。忽略电子动量的贡献 ($m_e \ll m_i$), 且 $\mathbf{V}$ 近似为 $\mathbf{v}_i$, 则 LHS:

$$\sum_j m_j n_j \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_j \cdot \nabla \right] \mathbf{v}_j \approx \rho_m \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V}$$

运动方程:

$$\rho_m \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right] \mathbf{V} = \rho_q \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p$$

34 / 52

Navigation icons



4. 广义 Ohm's 定律

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

对于双流体运动方程 (2)，我们对离子乘以 q_i/m_i ，对电子乘以 q_e/m_e ，再相加

$$\sum_j n_j q_j \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_j \cdot \nabla \right] \mathbf{v}_j = \sum_j \left[\frac{n_j q_j^2}{m_j} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}) - \frac{q_j}{m_j} \nabla p_j + \frac{q_j}{m_j} \mathbf{F}_{jk} \right]$$

这里，

$$\mathbf{F}_{ei} = -\frac{n_e m_e}{\tau_{ei}} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) = -\mathbf{F}_{ie}$$

简单起见，我们将 $\mathbf{v}$ 视为小量，并忽略二阶小量 $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ ，这样，LHS 即为

$$\approx \sum_j n_j q_j \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} = n_i q_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + n_e q_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} \approx \rho_m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho_m} \right)$$

35 / 52

Navigation icons



4. 广义 Ohm's 定律

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

证明.

$$\begin{aligned} \rho_m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho_m} \right) &= (n_e m_e + n_i m_i) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{n_e q_e \mathbf{v}_e + n_i q_i \mathbf{v}_i}{n_e m_e + n_i m_i} \right) \\ &= \left(n_i + \frac{n_e m_e}{m_i} \right) \frac{\partial}{\partial t} \frac{n_e q_e \mathbf{v}_e + n_i q_i \mathbf{v}_i}{n_i + \frac{n_e m_e}{m_i}} \\ &\approx n_i \frac{\partial}{\partial t} \frac{n_e q_e \mathbf{v}_e + n_i q_i \mathbf{v}_i}{n_i} \end{aligned}$$

RHS 第一项

$$\sum_j \frac{n_j q_j^2}{m_j} \mathbf{E} = n_e^2 q_e^2 \left(\frac{1}{n_e m_e} + \frac{1}{n_i m_i} \right) \mathbf{E} = n_e^2 q_e^2 \left(\frac{n_i m_i + n_e m_e}{n_e m_e n_i m_i} \right) \mathbf{E} = -\frac{q_e q_i}{m_e m_i} \rho_m \mathbf{E}$$

36 / 52

Navigation icons



4. 广义 Ohm's 定律

磁流体力学
(MHD)

李 晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

RHS 第二项

$$\begin{aligned}
 \sum_j \frac{n_j q_j^2}{m_j} \mathbf{v}_j &= n_e q_e^2 \frac{\mathbf{v}_e}{m_e} + n_i q_i^2 \frac{\mathbf{v}_i}{m_i} \\
 &= \frac{q_e q_i}{m_e m_i} \left\{ \frac{n_e q_e m_i}{q_i} \mathbf{v}_e + \frac{n_i q_i m_e}{q_e} \mathbf{v}_i \right\} \\
 &= -\frac{q_e q_i}{m_e m_i} \{ n_i m_i \mathbf{v}_e + n_e m_e \mathbf{v}_i \} \\
 &= -\frac{q_e q_i}{m_e m_i} \left\{ n_e m_e \mathbf{v}_e + n_i m_i \mathbf{v}_i - \left(\frac{m_i}{q_i} + \frac{m_e}{q_e} \right) (q_e n_e \mathbf{v}_e + q_i n_i \mathbf{v}_i) \right\} \\
 &= -\frac{q_e q_i}{m_e m_i} \left\{ \rho_m \mathbf{V} - \left(\frac{m_i}{q_i} + \frac{m_e}{q_e} \right) \mathbf{j} \right\}
 \end{aligned}$$

37 / 52

Navigation icons



4. 广义 Ohm's 定律

磁流体力学
(MHD)

李 晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

RHS 第三项

$$\begin{aligned}
 \sum_j \frac{q_j}{m_j} \mathbf{F}_{jk} &= -\frac{1}{\tau_{ei}} \left(n_e q_e - n_e q_i \frac{m_e}{m_i} \right) (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) \\
 &= -\frac{1}{\tau_{ei}} \left(1 - \frac{q_e m_e}{q_i m_i} \right) \mathbf{j}
 \end{aligned}$$

38 / 52

Navigation icons



4. 广义 Ohm's 定律

磁流体力学
(MHD)

李 晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

LHS=RHS, 所以

$$\rho_m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho_m} \right) = \frac{q_e q_i}{m_e m_i} \left[\rho_m \mathbf{E} + \left\{ \rho_m \mathbf{v} - \left(\frac{m_i}{q_i} + \frac{m_e}{q_e} \right) \mathbf{j} \right\} \times \mathbf{B} \right] - \left(\frac{q_e}{m_e} \nabla p_e + \frac{q_i}{m_i} \nabla p_i \right) - \left(1 - \frac{q_e m_e}{q_i m_i} \right) \frac{\mathbf{j}}{\tau_{ei}}$$

进一步地

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\frac{m_e m_i}{q_e q_i} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho_m} \right) + \frac{1}{\rho_m} \left(\frac{m_i}{q_i} + \frac{m_e}{q_e} \right) \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \left(\frac{q_e}{m_e} \nabla p_e + \frac{q_i}{m_i} \nabla p_i \right) \frac{m_e m_i}{q_e q_i \rho_m} - \left(1 - \frac{q_e m_e}{q_i m_i} \right) \frac{m_e m_i}{q_e q_i \rho_m} \frac{\mathbf{j}}{\tau_{ei}}$$

39 / 52

Navigation icons



4. 广义 Ohm's 定律

磁流体力学
(MHD)

李 晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

定义电阻, η :

$$\eta = \frac{m_e m_i \overline{\nu_{ei}}}{q_e q_i (n_i m_i)} = \frac{m_e \overline{\nu_{ei}}}{q_e^2 n_e}, \quad \overline{\nu_{ei}} = \frac{1}{\tau_{ei}}$$

在缓慢运动条件下, 惯性效应不重要, $\partial/\partial t$ 可以被忽略。

如果进一步忽略 m_e/m_i , 则可得**广义 Ohm's 定律**, 描述导电流体的电学特性。(Q: 普通 Ohm's 定律是什么, 有何区别?)

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{1}{ne} (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{P}_e) + \eta \mathbf{j}$$

$\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ 即**Hall**电流项。这一项和压力梯度项往往可以忽略不计, 上式可简化为

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}$$

40 / 52

Navigation icons



5. 状态方程

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

把电子和离子的状态方程相加：

$$p_e n_e^{-\gamma_e} + p_i n_i^{-\gamma_i} = \text{const.}$$

因为 $\gamma_e = \gamma_i = \gamma$, $\rho_m \approx nm_i$

可得**状态方程**：

$$p \rho_m^{-\gamma} = \text{const}$$

41 / 52

Navigation icons



MHD 方程组

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

质量守恒：

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{V}) = 0 \quad (8)$$

动量守恒：

$$\rho_m \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = \rho_q \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p \quad (9)$$

电荷守恒：

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (10)$$

状态方程：

$$p \rho_m^{-\gamma} = \text{const} \quad (11)$$

广义 Ohm's 定律：

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad (12)$$

42 / 52

Navigation icons



MHD 方程组

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

假定流体是电中性的，因此电荷密度 ρ_q 为零。

因为它是准中性的，我们不需要 Poisson 方程。

MHD 仅用于低频现象，与传导电流相比，Maxwell 位移电流 $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ 可忽略不计。

43 / 52

Navigation icons



MHD 方程组

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

为获得对电阻 MHD 等离子体完整且自洽的描述，还必须与 Maxwell 方程相结合。

Maxwell 方程组

Ampere's Law:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{J}$$

Divergenceless $\mathbf{B}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Faraday's law:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Gauss's law:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

44 / 52

Navigation icons



理想 MHD 的广义 Ohm's 定律

磁流体力学
(MHD)

李 晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

理想 MHD 等离子体：当碰撞频率趋于零时，电导率趋于无穷大。

此时，**广义 Ohm's 定律**可简化为

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (13)$$

垂直于 $\mathbf{B}$ 的流体速度分量由 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ 给出，与单粒子轨道理论中的 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移速度相同。

45 / 52

Navigation icons



目 录

磁流体力学
(MHD)

李 晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

1 前言

2 多元流体方程组

3 单流体方程组

4 作业

46 / 52

Navigation icons



练习 1.1

磁流体力学
(MHD)

李 晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

Distribution function and averages. The average of a quantity $G(\mathbf{v})$ over a distribution function $f(\mathbf{v})$ is defined as

$$\langle G \rangle = \frac{\int G(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}) d^3 \mathbf{v}}{\int f(\mathbf{v}) d^3 \mathbf{v}}$$

The Maxwellian distribution (in 3D) is

$$f(\mathbf{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{mv^2}{2T} \right)$$

Note that the isotropy of this distribution means that all Cartesian coordinates are equivalent, there is no preferred direction.



练习 1.1

磁流体力学
(MHD)

李 晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

(a) Prove that the form of f is correctly normalized, i.e. that $\int f d^3 \mathbf{v} = n$

Evaluate the averages of the following:

(b) a specific Cartesian coordinates: $\langle v_x \rangle$

(c) the square velocity: $\langle v^2 \rangle$, and the average particle energy $\langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle$

(d) the average speed $\langle |\mathbf{v}| \rangle$



练习 1.2

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

Show for a steady-state flow ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) that the momentum equation with a gravitational force, $F_g = \rho_m \mathbf{g}$, an isotropic pressure, and no electromagnetic forces ($\mathbf{E} = 0$ and $\mathbf{B} = 0$)

$$\rho_m \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = -\nabla P + \rho_m \mathbf{g}$$

can be integrated once along a streamline to obtain Bernoulli's equation:

$$\frac{1}{2} \rho_m V^2 + P + \rho_m g z = \text{constant}$$

Assume that the gravitational force term can be derived from a potential, $\rho_m \mathbf{g} = -\nabla \phi_g$ where $\phi_g = \rho_m g z$ and g is constant.

Navigation icons: back, forward, search, etc.



练习 1.3

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

The energy equation for the ideal MHD plasma. In the limit of ideal MHD, the MHD equations conserve energy exactly. To derive an expression for the energy in this limiting case, let us start with the momentum equation. Multiplying the momentum equation by $\mathbf{V}$, and eliminating $\mathbf{J}$ via Ampere's law, show that:

$$(a) \rho_m \mathbf{V} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = -(\mathbf{V} \cdot \nabla) P + \frac{V}{\mu_0} \cdot [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}]$$

Using the mass continuity equation, show that the left-hand side of the above equation can be rewritten in the following form:

$$(b) \rho_m \mathbf{V} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_m V^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{V^2}{2} \rho_m \mathbf{V} \right)$$

Navigation icons: back, forward, search, etc.



练习 1.3

磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

Use the adiabatic equation of state, i.e. $\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho_m \gamma} \right)$, show that the first term on the right-hand of equation (a) can be solved in the following the form:

$$(c) (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{P} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \nabla \cdot (P \mathbf{V})$$

The second term on the right-hand of equation (a) can be rewritten as

$\mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$. Noting that $\mathbf{E} = -\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ for an ideal MHD fluid, show the second term can be rewritten as:

$$(d) \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2} \right) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

Finally, substituting equations (b)(c)(d) into equation (a), we obtain the energy conservation law for an ideal MHD fluid. Please write down the correct energy equation.

51 / 52

Navigation icons



磁流体力学
(MHD)

李晖

前言

多元流体方程组

单流体方程组

作业

Thank you !

52 / 52

Navigation icons