



前言

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

上节课，我们用唯象的方式推导了 MHD 多元方程组，然后又推导了单流体的方程组。有了方程组的理论框架，我们就可以研究一些观测现象了，如：

- 太阳黑子（Q：什么是太阳黑子？）为什么能在太阳表面“稳定存在”？
- 受控核聚变里的高温等离子体（温度堪比太阳核心），怎么才能不碰容器壁、乖乖待在原地？
-

答案都藏在“磁流体静平衡”里，也是我们今天要解锁的核心：等离子体在磁场中“不动也稳定”的秘密。

3 / 61

Navigation icons



前言

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

磁流体力学包括两个主要分支：磁流体静力学和磁流体动力学。

磁流体动力学专注于研究动态过程；

磁流体静力学 (Magnetohydrostatics) 专注于等离子体在磁场中的静平衡问题，不考虑时间依赖性和等离子体流动，是磁流体动力学的特殊情形。

磁流体静力学在天体物理和等离子体物理中有广泛应用，如太阳黑子建模、太阳活动区三维日冕磁场结构的外推、受控热核反应的等离子体约束。

对于平静时期的空间等离子体而言，通常也是一个合理假设。

4 / 61

Navigation icons



力平衡方程

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

上节课，我们推导了 MHD 方程组的运动方程：

$$\rho_m \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = \rho_q \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p$$

对于磁静平衡态而言，假定 $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\mathbf{V} = 0$, 且 $\rho_q = 0$, 则：

$$0 = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right)$$

进一步可得 **力平衡方程**：

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (1)$$

左边是“热压 + 磁压”的总压力梯度，右边是磁张力相关的项。热压就像等离子体内部的“扩张力”，想把自己散开；磁压像磁场的“收缩力”，想把等离子体压紧；而磁张力则像“拉力”，把弯曲的磁力线拉直。静平衡，就是这三种力刚好“掰手腕”掰平了。

5 / 61



补充证明

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

这里，我们将证明：

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\frac{1}{2} \nabla B^2 + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

RHS 第一项的分量形式为：

$$\nabla B^2 = \nabla (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) = \hat{\mathbf{x}} \left[\frac{\partial B_x^2}{\partial x} + \frac{\partial B_y^2}{\partial x} + \frac{\partial B_z^2}{\partial x} \right] + \hat{\mathbf{y}}(\cdot) + \hat{\mathbf{z}}(\cdot)$$

RHS 第二项的分量形式：

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \left[B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \right] \mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}} \left[B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right] + \hat{\mathbf{y}}(\cdot) + \hat{\mathbf{z}}(\cdot)$$

6 / 61



补充证明

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

现在考察左边的分量形式：

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} & \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\
 &= \hat{\mathbf{x}} \left[\underbrace{B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_x}{\partial z}}_{[\mathbf{B} \cdot \nabla] B_x} - B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} - B_y \frac{\partial B_y}{\partial x} - B_z \frac{\partial B_z}{\partial x} \right] + \dots \\
 &= \hat{\mathbf{x}} \left\{ [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}]_x - \frac{1}{2} \frac{\partial B_x^2}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial B_y^2}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial B_z^2}{\partial x} \right\} + \hat{\mathbf{y}}(\cdot) + \hat{\mathbf{z}}(\cdot)
 \end{aligned}$$

因此

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}} \left\{ -\frac{1}{2} [\nabla B^2]_x + [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}]_x \right\} + \hat{\mathbf{y}}(\cdot) + \hat{\mathbf{z}}(\cdot)$$

7 / 61



进一步简化

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

很多情况下， $\frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$ 都可以忽略。比如，在一个直的磁力线条件下或者当 $\mathbf{B}$ 在沿其自身方向变化很缓慢时。这样MHD 静力学方程可改写为：

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0 \quad (2)$$

即

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{const}$$

LHS 的第一项是热压，而第二项则是磁压。二者的比值被定义为等离子体 β 值

$$\beta = \frac{2\mu_0 p}{B^2} = \frac{2\mu_0 \sum n k_B T}{B^2}$$

β 值越大，说明热压越重要； β 值越小，磁场的作用越主导。比如太阳日冕的 10^{-4} （磁场牢牢束缚等离子体），而受控核聚变装置的 $0.1 - 1$ （热压和磁压势均力敌）。

8 / 61



磁流体静力学方程组

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

在研究动力系统时，从最简单的解开始总是有用的。这些通常是稳态。

等离子体系统中的许多物理过程发生得很慢，即时间尺度比系统典型时间尺度长得多。

- 无时间依赖且无等离子体流动。
- 更精确：与静态力（洛伦兹力，等离子体压力梯度）相比，MHD 中的动态项很小。

因此，**磁流体静力学方程组**为：

$$-\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

9 / 61

Navigation icons



等离子体柱 θ -箍缩

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

举个例子：压力平衡的等离子体柱 θ -箍缩。柱的长度无限，且保持均匀； $\mathbf{B}$ 只有 Z 分量， $\mathbf{j}$ 只有 θ 分量， ∇p 只有 r 分量，因此只需要力：

$$(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_r - (\nabla p)_r = 0$$

考虑 Ampere 定律：

$$(\nabla \times \mathbf{B})_\theta = (\mu_0 \mathbf{j})_\theta$$

可得（Q：柱坐标下的梯度、散度和旋度公式？）

$$j_\theta B_z - \frac{\partial}{\partial r} p = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial r} B_z = \mu_0 j_\theta$$

10 / 61

Navigation icons



等离子体柱 θ -箍缩

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

消去 j , 则有

$$-\frac{B_z}{\mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

然后

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_z^2}{2\mu_0} + p \right) = 0$$

因此

$$\frac{B_z^2}{2\mu_0} + p = \text{const}$$

另一种典型的 Z-箍缩, 见本次作业。

11 / 61

Navigation icons



等离子体柱 θ -箍缩的应用

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

作为磁约束等离子体的经典技术, 凭借“磁场驱动等离子体径向压缩、实现高温高密度”的核心原理, 在实验室研究和前沿技术开发中展现出多元应用价值:

- 等离子体物理基础研究: θ -箍缩的物理过程涵盖“磁流体平衡”“碰撞动力学”“不稳定性演化”等核心问题, 能验证 MHD 平衡、磁冻结、碰撞输运等理论, 为数值模拟提供实验数据;
- 技术开发: θ -箍缩仍是研究“等离子体压缩、约束与稳定性”的关键平台, 为聚变技术突破提供基础数据; 其产生的高密度等离子体具有强电离能力, 可作为“等离子体剥离器”替代传统固体箔片, 解决重离子束加速中的电荷态提升难题;
- 跨界应用: θ -箍缩等离子体在压缩阶段会释放紫外 (UV)、极紫外 (EUV)、软 X 射线等辐射, 可作为实验室级“脉冲辐射源”; 其独特优势 (无电极侵蚀、稳定性可控), 还被用于开发跨界技术。

12 / 61

Navigation icons



磁张力

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

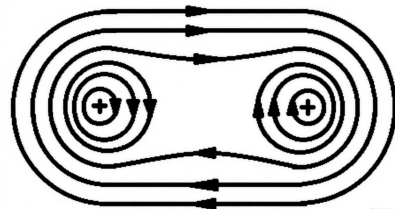
简化力平衡方程时，我们忽略 $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ 项。现在，我们则需要考虑该项的作用。

众所周知，携带平行电流的两根导线相互吸引，就像受到磁力线张力一样。而**磁张力**可由下式来描述：

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} = B_x \frac{\partial}{\partial x} (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) + \dots$$

如果磁力线是平行的直线，那么： $\mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{i}}$ 和 $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} = 0$ 。

所以，在磁力线是弯曲的情况下，磁张力的重要性就开始凸显。



13 / 61

Navigation icons



磁张力

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

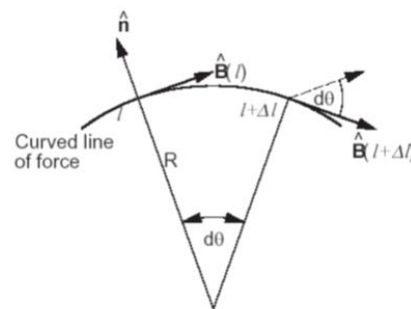
漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

考虑如右图所示的几何结构，明确以下参量：

- $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{B}/B$ ，磁场方向的单位矢量， B 为磁场强度
- l ，沿磁力线的弧长坐标
- $\hat{\mathbf{n}}$ ，磁力线法向单位矢量，垂直于 $\hat{\mathbf{b}}$
- R ，磁力线的曲率半径，越弯曲，值越小



由方向导数可知，

$$(\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{b}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial l} = \frac{\hat{\mathbf{b}}(l + \Delta l) - \hat{\mathbf{b}}(l)}{\Delta l}$$

14 / 61

Navigation icons



磁张力

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

单位矢量的变化只能是“方向变化”，显然

$$\hat{\mathbf{b}}(l + \Delta l) - \hat{\mathbf{b}}(l) = -\hat{\mathbf{n}}\Delta\theta$$

由于 $\Delta l = R\Delta\theta$ 时，因此

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{b}} &= -\frac{\hat{\mathbf{n}}}{R} \\ \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} &= -\frac{B^2}{R} \hat{\mathbf{n}}\end{aligned}$$

所以，磁张力与磁力线的曲率半径成反比。磁力线可看作受张力 B^2/μ_0 作用的弹性绳。



磁应力张量

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

磁压力和磁张力的存在表明：磁力在不同方向上是不同的，应该是**各向异性应力张量**。

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \left[-\nabla \left(\frac{B^2}{2} \right) + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} \right] = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \left[\frac{B^2}{2} \mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{B} \right]$$

这里， $\mathbf{I}$ 是单位张量，根据 $\nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}$ ，在局地坐标系下 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ ，则

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right] = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p = -\nabla \cdot \begin{bmatrix} p + \frac{B^2}{2\mu_0} & 0 & 0 \\ 0 & p + \frac{B^2}{2\mu_0} & 0 \\ 0 & 0 & p - \frac{B^2}{2\mu_0} \end{bmatrix}$$

磁场在 $\mathbf{B}$ 的横向方向上体现为压力（即 x, y 方向），在平行方向体现为张力（即 z 方向）。



磁应力张量

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

上述解释肯定有用，但也导致一些**误导**，比如暗示存在一个方向为 $\mathbf{B}$ 的力，而实际上并没有这样的力，因为 $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ 显然是垂直于 $\mathbf{B}$ ，而在 $\mathbf{B}$ 方向上没有分量。

更准确的方法如下：令 $\mathbf{B} = B\mathbf{s}$ ，其中 $\mathbf{s}$ 是沿 $\mathbf{B}$ 方向的单位向量。因此：

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} = B \frac{d(B\mathbf{s})}{ds} = B \frac{dB}{ds}\mathbf{s} + B^2 \frac{d\mathbf{s}}{ds} = \frac{d(B^2/2)}{ds}\mathbf{s} - B^2 \frac{\mathbf{n}}{R}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \times \mathbf{B} &= \frac{1}{\mu_0} \left[-\nabla \left(\frac{B^2}{2} \right) + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} \right] \\ &= -\frac{B^2}{\mu_0} \frac{\mathbf{n}}{R} - \frac{1}{\mu_0} \left[\nabla \left(\frac{B^2}{2} \right) - \frac{d(B^2/2)}{ds} \mathbf{s} \right] \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left[-\nabla_{\perp} \left(\frac{B^2}{2} \right) - B^2 \frac{\mathbf{n}}{R} \right] \end{aligned}$$

RHS 第一项描述了垂直于磁场的压力梯度所产生的磁力；
RHS 第二项描述的是使磁曲率变直的力。

17 / 61

Navigation icons



磁面

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

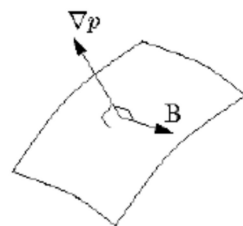
如果我们对方程 $-\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$ 应用 $(\mathbf{B} \cdot)$ ，则

$$0 = \mathbf{B} \cdot (-\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot \nabla p$$

在 MHD 中，**沿磁力线的压力是恒定的，同一条磁力线上所有点的压力都相等。**

对任意一个 $\nabla p \neq 0$ 的体元，其等压面上的任意点，压力梯度 ∇p 都垂直于该表面。而 $\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$ 表明**磁场 $\mathbf{B}$ 垂直于压力梯度 ∇p** 。则，磁力线 $\mathbf{B}$ 位于 $p = \text{const}$ 的等压面上。

在 MHD 平衡态下，这些等压面被称为**磁面**。



18 / 61

Navigation icons



李 晖

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

在受控核聚变（如 Tokamak 装置）中，磁面是等离子体约束的核心结构：

- 闭合磁面能让等离子体“绕着磁面转”，不会触碰装置内壁（避免高温等离子体烧坏容器）；
- 磁面嵌套结构能分层约束等离子体，控制不同区域压力分布，实现长时间稳定约束。

磁面是 MHD 平衡态的“自然产物”，本质是“压力恒定的等压面 + 磁力线所在的曲面”，它体现了热压与磁场的平衡关系，是磁约束等离子体的核心空间结构。



李 暉

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

如果我们对方程 $-\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$ 应用 $(\mathbf{j} \cdot)$, 则

$$0 = \mathbf{j} \cdot (-\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{j} \cdot \nabla p$$

因此，

$$\mathbf{j} \cdot \nabla p = 0$$

等压面是**电流面**。因此，磁面也是电流面。

需要注意的是, 只有在 MHD 近似中并且当 $\nabla p \neq 0$ 时, 磁面的存在才有保证。

考虑到对 MHD 的修正, 即使 $\nabla p \neq 0$, 也可能没有磁面。





目录

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

1 平衡态

2 无力场与势场

3 漂移与扩散

4 等离子体电阻率

5 作业

21 / 61

Navigation icons



低 β 平衡：无力场等离子体

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

MHD 静力平衡方程： $-\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$ ，体现了热压梯度力与洛伦兹力平衡。

在热压与磁压相比很小时，即 $\beta \ll 1$ ，可忽略 ∇p 。此平衡被称为 **无力场**。

方程 $-\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$ 可改写为 $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$ 。这意味着 $\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{B}$ 平行。

$$\mathbf{j} = \mu(r)\mathbf{B}$$

$\mu(r)$ 是随空间变化的标量函数（称为 **无力因子**）。电流沿磁力线流动，不会横向流动。
取散度：

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot (\mu(r)\mathbf{B}) = \mu(r)\nabla \cdot \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mu(r) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mu(r)$$

这意味着 $\mu(r)$ 沿磁力线不能变化。一般来说， $\mu(r)$ 在不同的磁力线上取不同的值，但在同一磁力线上必须是常数。

22 / 61

Navigation icons



低 β 平衡：无力场等离子体

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

普通 MHD 平衡是“热压 + 磁场”共同平衡，而无力场是磁场仅靠自身的几何结构（电流与磁场平行）实现力的平衡——不需要热压的参与，磁场自己“支撑”自己。

最简单的情况是考虑 $\mu(r)$ 为常数，即**线性无力场**：

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} = \mu_0 \mu \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$$

这种形式更便于处理，因为它对指定的 $\mu(r)$ 来说在 $\mathbf{B}$ 中是线性的。对于 $\mu = 0$ 的特殊情况，电流也为 0，磁场则为势场。

线性方程通常可通过级数展开来求解。由于它仍然是矢量方程而非标量方程，因此通过级数展开获得通解略显复杂。

23 / 61

Navigation icons



低 β 平衡：无力场等离子体

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

在此，我们不讨论这种通解，而仅考虑具有柱对称性的解。在柱坐标下，假设柱对称性（即磁场仅随 r 变化，无 θ 或 z 依赖），磁场旋度为：

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{r} \left(\frac{dB_z}{d\theta} - \frac{d(rB_\theta)}{dz} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{dB_r}{dz} - \frac{dB_z}{dr} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left(\frac{d(rB_\theta)}{dr} - \frac{dB_r}{d\theta} \right) \hat{\mathbf{z}} \\ &= -\frac{dB_z}{dr} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rB_\theta) \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

结合线性无力场方程，分量方程为：

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha B_r \\ -\frac{dB_z}{dr} &= \alpha B_\theta \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rB_\theta) &= \alpha B_z \end{aligned}$$

24 / 61

Navigation icons



低 β 平衡：无力场等离子体

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

25 / 61

这样, $B_r = 0$ 。联立剩下两个方程, 消除 B_θ 得到零阶贝塞尔方程

$$r^2 \frac{d^2 B_z}{dr^2} + r \frac{dB_z}{dr} + (\alpha^2 r^2 - 0) B_z = 0$$

其通解为 $B_z(r) = C_1 J_0(\alpha r) + C_2 Y_0(\alpha r)$, 其中 J_0 是 0 阶第一类贝塞尔函数 ($r=0$ 处有限), Y_0 是 0 阶第二类贝塞尔函数 ($r=0$ 处发散)。实际等离子体场景中 (如等离子体柱中心 $r=0$), 磁场需有限, 故排除发散解, 取 $C_2 = 0$ $C_1 = B_0$, 得: $B_z(r) = B_0 J_0(\alpha r)$

再代入 $-\frac{dB_z}{dr} = \alpha B_\theta$ 式, 结合贝塞尔函数递推关系 $\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$, 得:
 $B_\theta(r) = B_0 J_1(\alpha r)$, 其中 J_1 是 1 阶第一类贝塞尔函数。

磁场的解: $B_r = 0$, $B_\theta = B_0 J_1(\alpha r)$, $B_z = B_0 J_0(\alpha r)$

Navigation icons



势场能量最低定理

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

26 / 61

势场能量最低定理: 对于体积为 V 闭合等离子体空间, 在具有相同边界处法向磁场 (B_n) 分布的所有磁场 ($\mathbf{B}$) 中, 势场的能量最低。

通过构造, 总磁场可写为如下两个部分:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_p + \mathbf{B}_1$$

$\mathbf{B}_p = -\nabla\phi$ 为满足边界法向分布 B_n 的势场, 则 $\mathbf{B}_1$ 的边界法向分布 (B_{1n}) 为零。

V 内的总磁能 W 是:

$$W = \int \frac{(\mathbf{B}_p + \mathbf{B}_1)^2}{2\mu_0} dV = \int \frac{B_p^2 + 2\mathbf{B}_p \cdot \mathbf{B}_1 + B_1^2}{2\mu_0} dV$$
$$\int \mathbf{B}_p \cdot \mathbf{B}_1 dV = - \int \nabla\phi \cdot \mathbf{B}_1 dV = - \int \nabla \cdot (\phi \mathbf{B}_1) dV = \text{(Q: 定理?)} = - \int \phi B_{1n} dS = 0$$

Navigation icons



$$W = \int \frac{B_p^2 + B_1^2}{2\mu_0} dV$$

$$W_1 = \int \frac{\mathbf{B}_1^2}{2\mu_0} dV$$

目 录



李 晖

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

MHD 静平衡是“理想极限状态”，如果存在“非理想因素”或“平衡破坏”，就会导致等离子体的漂移和的扩散运动。

流体元由很多单个粒子组成。若单独的导引中心具有垂直于 B 的漂移，则可预期流体元也有该方向的漂移。

然而，由于 ∇p 项仅出现在流体方程中，因此应该存在一项与 ∇p 相关的、仅流体元有而粒子却没有的漂移。

对于每一种粒子，从动量方程出发：

$$nm \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla p$$

假设 E 和 B 均匀, n 和 p 存在梯度。在磁约束等离子体柱中, 这是很普遍的情况。

29 / 61



李 晖

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

对于磁静平衡状态（准静态），可忽略上述动量方程的左边部分：

为研究垂直于 B 的运动, 将动量方程与 B 进行叉乘。

$$0 = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla p \times \mathbf{B}$$

对于垂直于 B 的运动, $u \cdot B = 0$, 则得到

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_\perp = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} - \frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{qnB^2} \equiv \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_D$$

$\mathbf{v}_E$ 是通常的 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移，如粒子描述中所述， $\mathbf{v}_D$ 被称为抗磁漂移。

30 / 61





抗磁漂移的特点

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

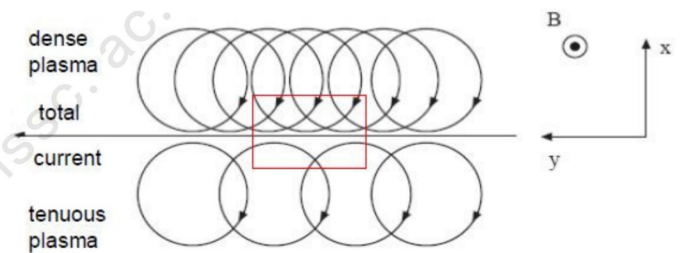
无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

当存在密度梯度时，抗磁漂移由 Lamor 运动产生，如右图所示



抗磁漂移不依赖于质量，但随电荷符号改变，这导致电子和离子向相反方向漂移，产生**抗磁电流**：

$$\mathbf{j}_D = ne(\mathbf{v}_{Di} - \mathbf{v}_{De}) = \frac{\mathbf{B} \times \nabla_{\perp} p_{\perp}}{B^2}$$

31 / 61

Navigation icons: back, forward, search, etc.



中性片电流

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

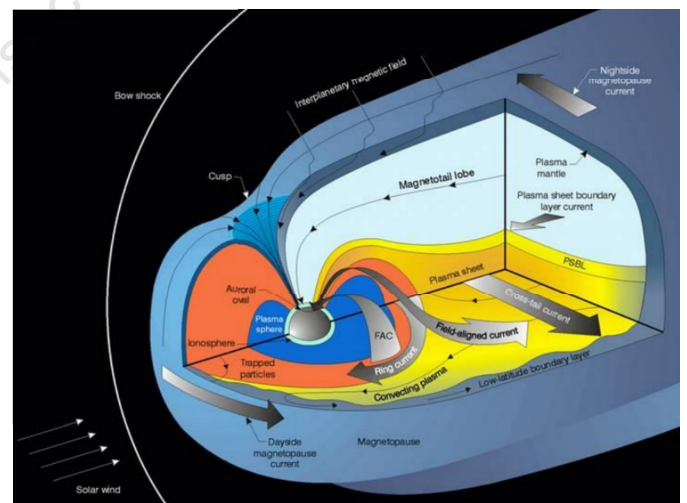
等离子体电阻率

作业

抗磁电流的一个典型例子是地球磁尾的中性片电流，如下图所示，它将向内（北瓣）和向外（南瓣）的磁场区域分开。

中性片参数

- 温度：1-10 keV
- 横向磁场：1-5 nT
- 密度：1 cm⁻³
- 厚度：1-2 R_E
- 等离子体 β：10-100
- 中性片电流强度：nA/m²



32 / 61

Navigation icons: back, forward, search, etc.



Harris 电流片模型

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

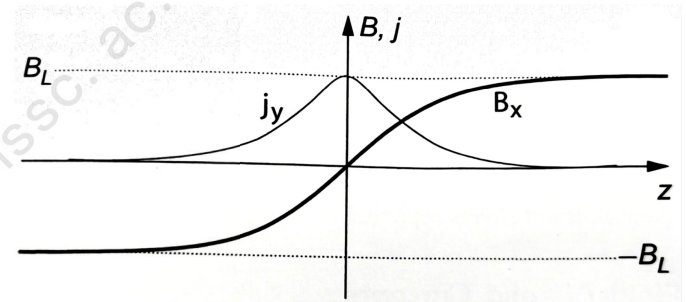
等离子体电阻率

作业

Harris 电流片模型如右图所示。

$$B_x = B_L \tanh(z/L_B)$$

其中 B_L 是尾瓣区的磁场, L_B 是其变化尺度长度, 也是电流片的典型厚度。



等离子体片的边界由尾瓣的磁压和等离子体片的热压之间的平衡决定:

$$nk_B T \sim \frac{B_L^2}{2\mu_0}$$

33 / 61

Navigation icons



另一个例子

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

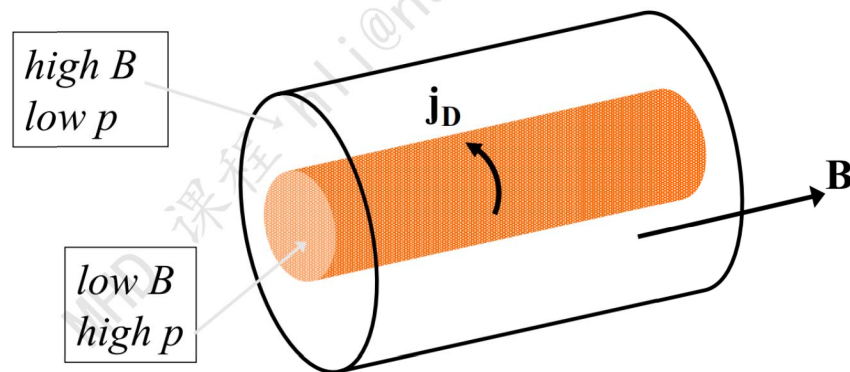
漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

下图显示了抗磁电流的另一个例子。

抗磁电流 j_D 减小了等离子体内的磁场, 同时保持热压和磁压之和在圆柱体各处恒定。



34 / 61

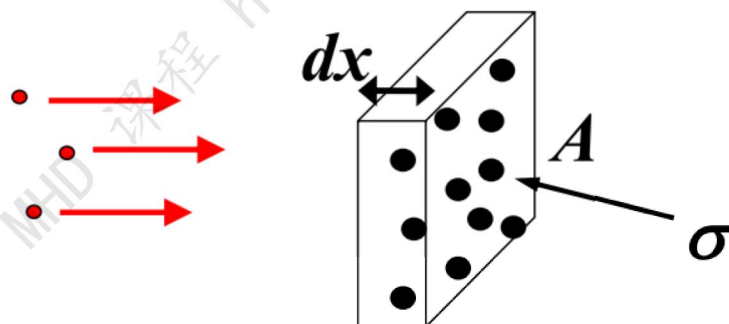
Navigation icons



当然，部分电离气体并非罕见，如电离层等离子体就属于该类。



试验粒子进入靶粒子的等效碰撞截面内会发生碰撞，并失去所有动量。





弱电离子气体中的扩散

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

平板中的靶粒子数为 $nAdx$ ，一个入射粒子在平板中被靶粒子阻挡的概率为 $\sigma nAdx/A = \sigma ndx$ 。

如果入射粒子的通量为 Γ ，则从平板另一边射出的通量为 $\Gamma^* = \Gamma(1 - \sigma ndx)$ 。

这样， Γ 随距离的变化为

$$\frac{d\Gamma}{dx} = -n\sigma\Gamma$$

其解为

$$\Gamma = \Gamma_0 e^{-n\sigma x} = \Gamma_0 e^{-x/\lambda_m}$$

距离 λ_m 处，通量减少到初始值的 $1/e$ 。其中 $\lambda_m = 1/n\sigma$ 为碰撞的平均自由程。

37 / 61

Navigation icons



弱电离子气体中的扩散

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

入射粒子在传播距离 λ_m 之后，大概率会发生一次碰撞。对于速度为 u 的入射粒子，两次碰撞之间的平均时间： $\tau = \lambda_m/u$ ，

碰撞的平均频率为 $\tau^{-1} = u/\lambda_m = un\sigma$ 。

对于满足 Maxwell 分布的所有粒子（速度 u ）取平均后，可得碰撞频率： $\nu = n \langle \sigma u \rangle$

σ 也可以是速度的函数。

考虑具有标量压强项和碰撞等离子体（无磁场）的基本等离子体扩散过程：

$$nm \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = qn\mathbf{E} - \nabla p - mn\nu \mathbf{u}$$

38 / 61

Navigation icons



弱电离子气体中的扩散

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

对于足够慢的运动（与碰撞时间相比），考虑稳态。

$$0 = qn\mathbf{E} - \nabla p - mn\nu\mathbf{u}$$

因此

$$\mathbf{u} = \frac{1}{mn\nu}(qn\mathbf{E} - \nabla p)$$

对于等温等离子体（并服从理想气体状态方程），可以写成

$$\mathbf{u} = \frac{1}{mn\nu}(qn\mathbf{E} - k_B T \nabla n) = \frac{q}{m\nu}\mathbf{E} - \frac{k_B T}{m\nu} \frac{\nabla n}{n}$$

39 / 61

Navigation icons



弱电离子气体中的扩散

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

$\mathbf{E}$ 和 $\nabla n/n$ 的系数分别称为迁移率和扩散系数。其中：

迁移率

$$\mu = \frac{|q|}{m\nu}$$

扩散系数

$$D = \frac{k_B T}{m\nu}$$

粒子的种类不同， μ 和 D 的值也将不同。二者由**爱因斯坦关系**联系起来

$$\mu = \frac{|q|D}{k_B T}$$

40 / 61

Navigation icons



弱电离子气体中的扩散

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

引入迁移率和扩散系数后, $\mathbf{u}$ 的方程变为

$$\mathbf{u} = \frac{q}{|q|} \mu \mathbf{E} - D \frac{\nabla n}{n}$$

粒子通量 $n\mathbf{u}$ 可以写成

$$\Gamma = n\mathbf{u} = \frac{q}{|q|} \mu n \mathbf{E} - D \nabla n$$

当粒子是中性的 (或 $E = 0$), 迁移消失, 输运方程只剩下扩散, 可以简化成 Fick 定律, 作为一种特殊情况描述了一种随机游走类型的扩散: 沿 ∇n 的运动仅因为 n 较大的区域中有更多粒子。

Fick 定律: $\Gamma = n\mathbf{u} = -D \nabla n$

41 / 61

Navigation icons



扩散方程

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

粒子 $j = i, e$ 的连续性方程可以写成

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot (n_j \mathbf{u}) = 0$$

考虑满足 Fick 定律的情况, $\Gamma_j = -D_j \nabla n_j$ 。然后

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot (-D_j \nabla n_j) = 0$$

对于均匀的扩散系数, 得到**扩散方程**

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} - D_j \nabla^2 n_j = 0$$

42 / 61

Navigation icons



双极扩散

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

43 / 61

对容器中的等离子体，粒子因向容器壁扩散而衰减。电子和离子在靠近器壁的地方复合，器壁附近等离子体密度趋向于零。对于缓慢的流动，动量方程中的时间依赖性可以忽略。

对于电子与离子温度 ($T_e = T_i$) 相同的等离子体，电子质量远小于离子 ($m_e \ll m_i$)，因此电子的自由扩散速度远快于离子 ($D_e \gg D_i$)。电子自由扩散，会快速远离离子并在壁附近建立负电荷，正电荷被留在器壁附近。这种电荷分离建立起一种极化电场，阻碍电子扩散、加速离子扩散，最终使电子和离子的扩散通量相等，形成“协同输运”以维持等离子体的准中性，这就是**双极扩散**。

Navigation icons



双极扩散

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

44 / 61

当空间极化电场产生相等的离子和电子通量时，达到平衡：

$$\Gamma_i = \frac{q_i}{|q_i|} \mu_i n_i \mathbf{E} - D_i \nabla n_i = \Gamma_e = \frac{q_e}{|q_e|} \mu_e n_e \mathbf{E} - D_e \nabla n_e$$

$$\mathbf{E} = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n}$$

平衡通量为带有一个新扩散系数的 Fick 定律

$$\Gamma_i = \mu_i \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \nabla n - D_i \nabla n = - \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \nabla n$$

Navigation icons



双极扩散

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

双极扩散系数

$$D_a = \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e}$$

当 D_a 为常数时，双极扩散方程为

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D_a \nabla^2 n = 0$$

在 $T_i = T_e$ 的情况下， $\mu_i D_e = \mu_e D_i$ 。又 $m_e \ll m_i$, $\mu_e \gg \mu_i$,

$$D_e > \frac{2\mu_i}{\mu_i + \mu_e} D_e = D_a = \frac{2\mu_e}{\mu_i + \mu_e} D_i \approx 2D_i$$

双极电场将离子扩散速率提高了一倍，但双极扩散速率仍由其中较慢的粒子所主导。



目 录

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

1 平衡态

2 无力场与势场

3 漂移与扩散

4 等离子体电阻率

5 作业



全电离等离子体中的碰撞

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

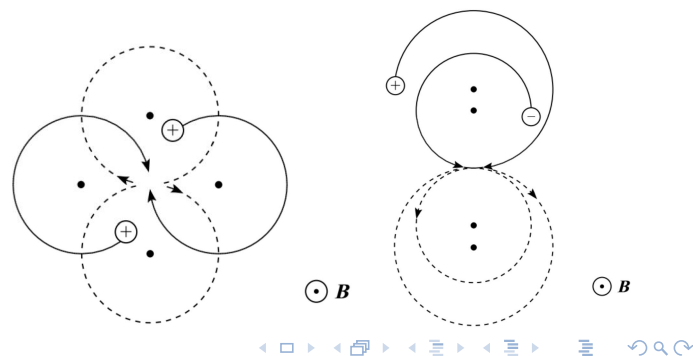
作业

粒子的宏观输运（如扩散）本质是导引中心的定向移动，而非单个粒子的回旋运动。

对于完全电离的等离子体而言，所有的碰撞都是带电粒子之间的 Coulomb 碰撞。并且：

同类粒子间碰撞产生的扩散效应很小，因为导引中心大部分保持在同一位置。正碰：交换速度和轨迹，导引中心位置不变。小角度碰撞：轨迹几乎不变。90° 碰撞：导引中心发生转移，但质心位置不变，如左图所示。

不同类粒子间碰撞会导致导引中心位置的显著变化，进而产生扩散。正碰时，离子速度几乎不变，而电子反弹后速度方向，导引中心会向“远离碰撞点”的方向快速移动，进行随机游走类型的扩散，离子则是由于碰撞的累积效应而扩散。



47 / 61



等离子体电阻率

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

存在带电粒子碰撞的情况下，电子和离子的流体运动方程为

$$\begin{aligned} n_i m_i \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} &= q_i n_i (\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \mathbf{P}_i + \mathbf{F}_{ie} \\ n_e m_e \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} &= q_e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \mathbf{P}_e + \mathbf{F}_{ei} \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{F}_{ei} = -m_e n_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) \nu_{ei}$$

$$\mathbf{F}_{ie} = -m_i n_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \nu_{ie}$$

动量守恒要求

$$\mathbf{F}_{ie} = -\mathbf{F}_{ei}$$

48 / 61



等离子体电阻率

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

$\mathbf{F}_{ie}$ ($\mathbf{F}_{ei}$) 表示离子 (电子) 与电子 (离子) 碰撞而获得的动量。

由于只涉及 Coulomb 碰撞 (Q: Coulomb 定律?), $\mathbf{F}_{ie}$ 和 $\mathbf{F}_{ei}$ 将与电荷的平方 (此处视为 e^2) 成正比; 还必须与离子和电子密度成正比 (此处视为 n^2); 同时正比于两种流体的相对速度。

因此, 基于物理原理, 可以写为

$$\mathbf{F}_{ei} = \eta e^2 n^2 (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$$

其中, η 为比例系数

49 / 61

Navigation icons



等离子体电阻率

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

比较

$$\mathbf{F}_{ei} = \eta e^2 n^2 (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$$

$$\mathbf{F}_{ei} = -m_e n_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) \nu_{ei}$$

可以容易地得出

$$\eta = \frac{m_e \nu_{ei}}{e^2 n}$$

这就是所谓的**等离子体比电阻率**, 和通常的电阻率的含义相一致。

50 / 61

Navigation icons



Coulomb 碰撞的机理

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

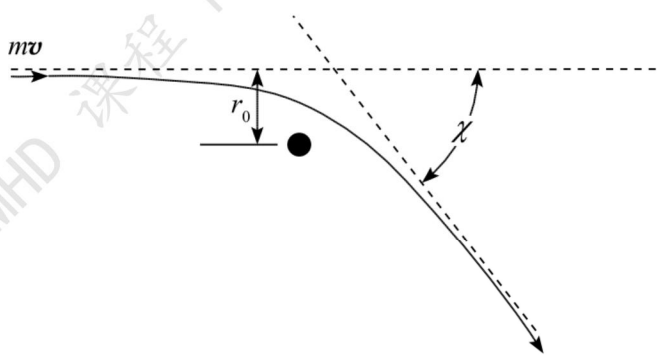
等离子体电阻率

作业

考虑一个速度为 u 的电子接近一个位置固定、电量为 e 的离子，如图所示。在没有 Coulomb 力时，电子与离子的最近距离为 r_0 ，称之为**碰撞参量**。

存在 Coulomb 引力时，电子将以角度 χ （与 r_0 有关）偏转，Coulomb 力为

$$F = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



51 / 61



Coulomb 碰撞的机理

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

在电子处于离子附近时才感受到这个力。粗略估算，这段时间为

$$T \approx \frac{r_0}{u}$$

所以，电子的动量变化近似为

$$\Delta(m_e u) = |FT| \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0 u}$$

进一步估计大角度碰撞 ($\chi \geq 90^\circ$) 的碰撞截面。对于 90° 碰撞， $\Delta(m_e u) \simeq m_e u$ ，则

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e u^2}$$

于是，碰撞截面

$$\sigma = \pi r_0^2 = \frac{e^4}{16\pi\epsilon_0^2 m_e^2 u^4}$$

52 / 61



Coulomb 碰撞的机理

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

于是，**碰撞频率**（短程、大角度碰撞）为

$$\nu_{ei} = n\sigma u = \frac{ne^4}{16\pi\epsilon_0^2 m_e^2 u^3}$$

因此，**电阻率**为

$$\eta = \frac{m_e}{ne^2} \nu_{ei} = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0^2 m_e u^3}$$

对于 Maxwell 分布， $\frac{1}{2} m_e u^2 = \frac{1}{2} k_B T_e$,

$$\eta = \frac{\pi e^2 m_e^{1/2}}{(4\pi\epsilon_0)^2 (k_B T_e)^{3/2}}$$

53 / 61

Navigation icons



Spitzer 电阻率

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

上式基于大角度碰撞的情况。实际上，Coulomb 力的作用距离长，小角度碰撞更加频繁。结果就是，大量小角度偏转的累计影响超过大角度碰撞的影响。

Spitzer 证明，上式应当乘以一个修正因子 $\ln \Lambda$ （Coulomb 对数）以提高准确性，即**Spitzer 电阻率**：

$$\eta = \frac{\pi e^2 m_e^{1/2}}{(4\pi\epsilon_0)^2 (k_B T_e)^{3/2}} \ln \Lambda \quad (3)$$

$\Lambda = \overline{\lambda_D/r_0} = 12\pi n\lambda_D^3$ 表示最大碰撞参量在 Maxwell 分布上的平均，**冲击参数**，并取最大碰撞参量为德拜长度 $\lambda_D = 7430(k_B T_e/n)^{1/2}$ [m] ($k_B T_e$ 单位取 eV)

$\ln \Lambda$ 对等离子体参数的确切值不敏感。对于大多数用途，将其设为 10 已经足够准确，无论涉及何种类型的等离子体。

54 / 61

Navigation icons



η 的物理意义

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

在仅由电子携带等离子体电流的情况下，当 $\mathbf{B} = 0$ 且 $T_e \sim 0$ （冷等离子体）时，电子流体的稳态运动方程可简化为

$$0 = -en\mathbf{E} + \mathbf{F}_{ei}$$

由于

$$\mathbf{F}_{ei} = \eta e^2 n^2 (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$$

并且

$$\mathbf{j} = en(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$$

则

$$\mathbf{E} = \eta \mathbf{j}$$

这就是 **Ohm 定律** 的最简单形式。

Navigation icons



η 的物理意义

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

在完全电离的等离子体中，等离子体电阻率与密度 n 无关，因为如果电荷载流子增加，碰撞摩擦也会增加，两者效果相互抵消。相反，在弱电离的等离子体中，碰撞摩擦仅由中性粒子引起，因此不随 n 增加，对于给定的 $\mathbf{E}$ ，电流与 n 成正比。

等离子体电阻正比于温度。加热等离子体时，Coulomb 碰撞截面减小，电阻率随温度升高而迅速下降。在高温下（几十千 eV），完全电离的等离子体基本上是“无碰撞”的。

ν_{ei} 随 u^{-3} 变化。在速度分布尾部的快速电子几乎不发生碰撞，电流主要由这些电子携带，而不是位于分布主体的大多数电子。如果突然施加一个电场到等离子体中，会发生一种称之为**电子逃逸**的现象，即一些恰巧在 $-\mathbf{E}$ 方向快速运动的电子，会在它们碰到离子前获得大量能量，以致于它们只发生小角度碰撞，使得它们有机会从电场中获得更多能量，进而进一步减少碰撞截面。如果 $\mathbf{E}$ 足够大，这些电子就可从分布主体中逃逸。

Navigation icons



目录

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

1 平衡态

2 无力场与势场

3 漂移与扩散

4 等离子体电阻率

5 作业

57 / 61

Navigation icons



练习 2.1

磁流体力学
(MHD)

李晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

MHD power generators may possibly be a more efficient way of converting heat into electricity. Think of one as consisting of a simple rectangular channel of (x -) width, a , (y -) height b , in which the plasma flows under pressure in the z -direction. Take the plasma density and velocity to be uniform. A uniform magnetic field, $\mathbf{B}$, is applied in the y -direction and the walls at $x = 0, a$ are electrodes where the electric current density (density j , assumed uniform) is picked off at a voltage difference Φ . Use the MHD equations to answer the following questions: (a) If the resistivity, η , of the plasma is negligible, what is the plasma velocity? (b) If the pressure is P_0 at $z = 0$, what is its value as a function of z ? (c) How much electric power is generated per unit length of the channel? (d) What is the rate of doing work per unit channel length by the plasma pressure force? (e) If η is not negligible but can be considered fixed, and the flow velocity and B-field are also fixed but the current density can be varied, what is the maximum electric power unit length that can be generated?

58 / 61

Navigation icons



练习 2.2

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

A θ -pinch (B_θ symmetry, $\mathbf{B}$ has only θ -component, j has only z -component and ∇p has only r component, so called because plasma currents flow in θ direction, in MHD equilibrium has magnetic field that is

$$B(r) = B_0 + (B_a - B_0) r/a$$

for $0 \ll r \ll a$, where the plasma edge is $r = a$, at which point the plasma pressure, p , is zero. Calculate: (a) The pressure profile, $p(r)$; (b) The current density profile, $j(r)$

(c) The maximum possible value of the β , where $\beta = 2\mu_0 \langle p \rangle / B_a^2$, where $\langle p \rangle$ is the volume average plasma pressure:

$$\langle p \rangle = \frac{\int_0^a p 2\pi r dr}{\pi a^2}$$

59 / 61

Navigation icons



练习 2.3

磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

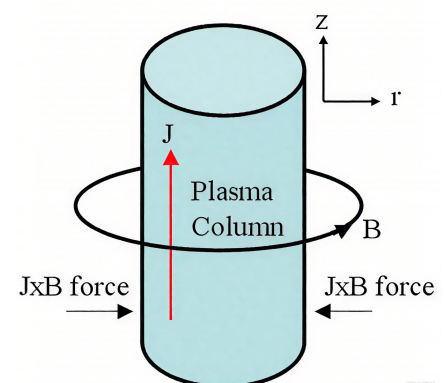
漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

Z-pinch, as shown right, is so-called because j follows in the z -direction.

(a) For a z -pinch equilibrium which has zero plasma pressure at the plasma edge, $r = a$, prove by integrating the MHD force balance equation a second time that the volume-averaged pressure is a function only of the total current, and find the function.



(b) If a hydrogen plasma z -pinch has uniform density $n = 10^{20} \text{ cm}^{-3}$, temperature $T_e = T_i = T_0(1 - r^2/a^2)$ with $T_0 = 10 \text{ keV}$, and radius $a = 0.01 \text{ m}$, what current is required?

60 / 61

Navigation icons



磁流体力学
(MHD)

李 晖

平衡态

无力场与势场

漂移与扩散

等离子体电阻率

作业

Thank you !