

背景太阳风数值模拟的熵守恒格式^{*}

王腾龙^{1,2} 冯学尚¹ 李彩霞^{1,2} 柳晓静^{1,2}

1(中国科学院国家空间科学中心 北京 100190)

2(中国科学院大学 北京 100049)

摘要 背景太阳风研究是根据行星际扰动传播情况预测空间天气状况的基础, 磁流体 (MHD) 模拟是背景太阳风研究的重要手段. 采用一种新的数值计算方式, 利用 Ideal GLM-MHD 将计算过程中产生的磁场散度以 c_h 的速度向计算区域外传播, 从而消去磁场散度; 重构部分使用受约束的最小二乘法, 将磁场散度作为约束条件添加到重构中, 进一步对重构后的磁场梯度进行修正; 通量计算采用满足热力学第二定律的熵守恒格式, 该格式能够确保在计算过程中熵不增, 保证数值稳定. 研究结果表明, 该方法应用于太阳风数值模拟的求解得到了更加稳定的结果.

关键词 有限体积法, 熵守恒, 磁场散度, 太阳风

中图分类号 P 353

Numerical Simulation for Solar Wind Background by Entropy Conservation Scheme

WANG Tenglong^{1,2} FENG Xueshang¹ LI Caixia^{1,2} LIU Xiaojing^{1,2}

1(National Space Science Center, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190)

2(University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

Abstract Background solar wind is a key factor for interplanetary disturbance propagation. Magnetohydrodynamic (MHD) simulation is an important tool for background solar wind study. In this paper an entropy conservation scheme is adopted. Ideal GLM-MHD is used to handle the magnetic divergence. The divergence of the magnetic field generated during the calculation is propagated outside the calculation domain with the maximum characteristic speed of MHD system. With the analytical divergence-free condition of magnetic field as additional constraint condition, the reconstruction of solution variables uses the constrained least squares method. The reconstructed magnetic field gradient is further modified by the way of iteration. The flux calculation adopts an entropy conservation scheme which satisfies the second law of thermodynamics. This formulation can ensure that the entropy does not increase in the calculation process, and the numerical stability can be guaranteed. The results show that numerical simulation for solar wind background by entropy

* 国家自然科学基金项目 (41531073) 和中国科学院“十三五”信息化建设专项项目 (XXH13505-04) 共同资助

2018-05-08 收到原稿, 2019-05-22 收到修定稿

E-mail: fengx@spaceweather.ac.cn

conservation scheme can obtain more stable results.

Key words Finite volume method, Conservation of entropy, Magnetic field divergence, Solar wind

0 引言

太阳风暴日冕-行星际传播过程的三维数值预报建模是空间物理的重要组成部分. 背景太阳风的数值模拟是太阳风暴日冕-行星际过程三维数值预报建模研究的基础. 目前 MHD 方程是唯一能自洽描述大尺度日冕-行星际空间等离子体动力学过程的方程组, 具有高度非线性, 因此发展适合日冕-行星际数值模拟的 MHD 新方法是一个基础性前沿课题.

在太阳风模拟中, 磁场散度为零的处理是一个关键问题. 计算过程中如果磁场散度 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 处理不当, 将导致非物理流动且同时出现负压或负密度的情况, 造成数值计算不稳定^[1]. 如何处理磁场散度是 MHD 方程组求解过程中需要关注的重点之一. 几种常用的处理磁场散度的方法如下^[2].

(1) 投影方法^[3]. 该方法又称为泊松校正, 通过添加校正磁场 $\bar{\mathbf{B}}$ 使得磁场散度在计算过程中满足 $\nabla \cdot (\mathbf{B} + \bar{\mathbf{B}}) = 0$. 为了满足校正磁场的物理一致性, 引入 $\bar{\mathbf{B}}$ 后不应引起额外的电流, 即 $\mathbf{j} \propto \nabla \times \bar{\mathbf{B}} = 0$, 可取 $\bar{\mathbf{B}} = \nabla \phi$. 由以上两个方程可以推出 $\Delta \phi = \nabla^2 \phi = -\nabla \cdot \mathbf{B}$. 可以利用 Multigrid 方法求解泊松方程, 得到校正后的磁场, 即 $\mathbf{B}^{\text{new}}|_{\nabla \cdot \mathbf{B}^{\text{new}}=0} = \mathbf{B} + \bar{\mathbf{B}}$. 然而 Multigrid 方法计算量较大, 文献 [4] 给出了另外一种基于中心差分的求解方法, 可降低计算复杂度.

(2) CT (Constraint Transport method)^[5] 方法. 在 Yee^[6] 计算电磁波传播方法的基础上, 采用交错网格, 流场和磁场处于不同的网格位置, 将面上的磁场通过特定的插值来实现网格单元的磁场散度为零. Balsara^[7] 及 Dai 等^[8] 对此进行了深入研究.

(3) Powell 八波方法^[9]. 在守恒形式的 MHD 方程组右端加入正比于 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 的源项, 使得在原有的 7 个波基础上增加了一个关于磁单极子的波. 该方法可以使散度随着流体的运动而运动, 在平缓的地方可以有效防止散度的积累. 该源项不仅有利于散度误差随流体传播到计算区域边缘, 还可使 MHD 方程对称化. 这在特征向量计算和保证熵守恒方面具有重要意义.

(4) 双曲消去法^[10]. 通过引入一个新的 $D(\psi) +$

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 方程来修正磁场散度, 核心思想是将散度误差逐渐传播扩散到计算区域边缘. 不同的算子 $D(\psi)$, 关于 ψ 的方程可以表现为椭圆、抛物、双曲三类不同性质的数学形式. 实际应用中最常用的是双曲型方程, 这与 MHD 双曲性一致. 此方程与 MHD 方程一起统称为 GLM-MHD. 求解时通常按 7+2 的形式分步求解方程, 其优点是两部分可分别采用不同的数值方法计算.

上述磁场散度消去的处理已被广泛应用于太阳风模拟^[11,12,23]. 有限体积方法应用于太阳风数值模拟中, 能够适应复杂的几何形状, 便于处理非线性问题. 大多数的数值方案都是根据 Godunov 理论^[13], 将界面上数值通量计算转化为求解一个局部的黎曼问题. 常用的通量计算包括 Lax-Friedrichs, HLL 系列及 Roe 等^[14]. Lax-Friedrichs 通量计算只考虑了最大特征波的影响, 其耗散较大; HLL 考虑了部分特征波; Roe 考虑最全面, 包含了所有的特征波信息, 但需要熵修正. 即使初始条件是光滑的, MHD 方程组的解也可能出现非物理震荡^[15], 使用上述黎曼解通量并不能保证数值格式稳定. 因此, 需要求方程的弱解, 不满足熵条件的弱解存在不唯一性. 满足熵守恒的通量不仅可以保证弱解的唯一性, 同时还满足热力学第二定律. Tadmor 等^[16] 首次采用熵守恒求解非线性双曲守恒方程, 之后 Ismail 和 Roe^[17] 构造了欧拉方程的熵守恒通量. 由于 MHD 方程固有的复杂性, 直到近期 Derigs 等^[18] 才对 Ideal GLM-MHD 控制方程建立了熵守恒通量^[19,20].

本文以 Feng^[11] 等首次引入的六片网格作为计算区域划分标准, 在有限体积情况下, 利用受约束的最小二乘重构, 以 Ideal GLM-MHD 作为控制方程, 采用熵守恒通量构造数值格式, 对太阳日冕大尺度结构进行初步数值模拟计算.

1 数值算法

1.1 控制方程

参考 Dedner 的 GLM-MHD 方程^[10], 引入修正场 ψ , 以 c_h 的速度向周围传播磁场散度的误差, 有

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c_h(\nabla \cdot \mathbf{B}) = -\alpha \psi. \quad (1)$$

热能的计算是通过总能量减去动能和磁能得到的, 因此任何磁场的增加或减少都会影响热能的计算. 根据文献 [21], 新的能量关系表达式为

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\|^2 + \frac{1}{2} \psi^2. \quad (2)$$

根据式 (1) 和式 (2), 可以推导出如下能量方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\mathbf{u} \left(\frac{\gamma p}{\gamma - 1} + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\|^2 \right) - \right. \\ \left. \mathbf{B}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) + c_h \psi \mathbf{B} \right] = \\ -\alpha \psi^2 - (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (3)$$

从而得到 Ideal GLM-MHD 控制方程如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ E \\ \mathbf{B} \\ \psi \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T + P \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{u} \bar{E} - \mathbf{B}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) + c_h \psi \mathbf{B} \\ \mathbf{u} \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \mathbf{u}^T + c_h \psi \mathbf{I} \\ c_h \mathbf{B} \end{bmatrix} = \\ -(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{Y} + \Psi + \eta. \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $\rho, \rho \mathbf{u}, E, \mathbf{B}$ 分别为等离子体的密度、动量、能量和磁场, $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$ 为 x, y, z 三个方向的速度, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)^T$ 为三个方向的磁场.

$$P = p + \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\|^2,$$

$$\bar{E} = \frac{\gamma p}{\gamma - 1} + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\|^2,$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{u} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ -\alpha \psi^2 \\ \mathbf{0} \\ -\alpha \psi \end{bmatrix},$$

$$\eta = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \mathbf{g} - 2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - \rho \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \\ \rho \mathbf{u} \cdot [\mathbf{g} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{S}_m \\ Q_e + \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}_m \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r}.$$

其中, $\mathbf{g}$ 为太阳的引力项, $\boldsymbol{\Omega}$ 是太阳自转角速度, 向量 $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$, 其中 r 为日心距离. 这里 $|\boldsymbol{\Omega}| = 2\pi/27 \text{ rad} \cdot \text{d}^{-1}$, $\mathbf{S}_m$ 和 Q_e 为加速加热项, 可以表示为

$$\mathbf{S}_m = M \left(\frac{r}{R_s} - 1 \right) \exp \left(-\frac{r}{L_M} \right) \frac{\mathbf{r}}{r},$$

$$Q_e = Q_1 \exp \left(-\frac{r}{L_{Q_1}} \right) +$$

$$Q_2 \left(\frac{r}{R_s} - 1 \right) \exp \left(-\frac{r}{L_{Q_2}} \right).$$

参数的具体取值可参见文献 [22]. 为避免计算过程中量纲之间的差异影响计算结果, 计算之前需要进行无量纲化处理, MHD 方程无量纲化可参见文献 [11].

1.2 网格系统

计算区域是一个球壳, 在两极区域会出现奇性, 进而影响网格的收敛性. Feng 等 [23] 首次将网格划分为 6 片区域, 如图 1 所示.

由图 1 可以看出, 整个球体分为均匀的 6 片, 这 6 片之间有重合, 每一片的大小完全相同, 任意一片都可以通过坐标旋转得到其他片. 这样的网格划分不仅能很好地解决奇性问题, 还便于并行实现. 相邻片

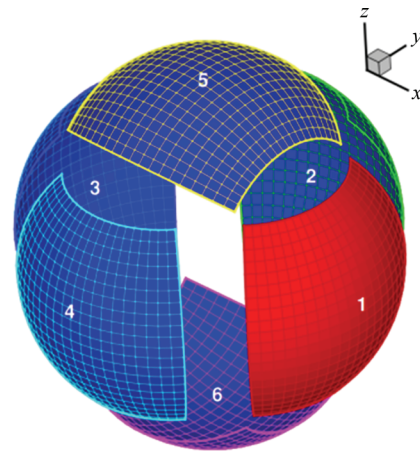


图 1 计算区域网格划分

Fig. 1 Mesh generation of the calculating domain

之间计算区域重叠便于片与片之间的边界处理. 网格生成时, 每片都有一个局部坐标系. 通过使用相同的网格生成程序, 只需将局部位置转换成全局坐标系便能得到整体网格. 每片网格的取值范围如下:

$$\left(\frac{\pi}{4} - \delta \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} + \delta\right) \cap \left(\frac{3\pi}{4} - \delta \leq \phi \leq \frac{5\pi}{4} + \delta\right). \quad (5)$$

式中参数 δ 是为了确保相邻网格片之间能够重叠, 使当前网格的 ghost-cell 落入相邻网格的计算网格内. 对于 θ 和 ϕ 方向的网格划分, 定义每一片上网格点如下:

$$\begin{aligned} \theta_j^l &= \theta_{\min} + (j-1)\Delta\theta, \quad j = 1, \dots, N_\theta - 1; \\ \phi_k^l &= \phi_{\min} + (k-1)\Delta\phi, \quad k = 1, \dots, N_\phi - 1. \end{aligned} \quad (6)$$

其中: $\Delta\theta = (\theta_{\max} - \theta_{\min})/(N_\theta - 2)$ 和 $\Delta\phi = (\phi_{\max} - \phi_{\min})/(N_\phi - 2)$; $l = 1, \dots, 6$ 表示 6 片网格; N_θ 和 N_ϕ 分别为纬向和经向的网格数目. 这里

$$\begin{aligned} \theta_{\min} &= \frac{\pi}{4}, \quad \theta_{\max} = \frac{3\pi}{4}, \\ \phi_{\min} &= \frac{3\pi}{4}, \quad \phi_{\max} = \frac{5\pi}{4}, \\ N_\theta &= N_\phi = 42. \end{aligned}$$

r 方向的划分采用 $r(i+1) = r(i) + \Delta r(i)$, $i = 1, \dots, N_r$, 其中 $\Delta r(i)$ 的取值如下:

$$\Delta r(i) = \begin{cases} 0.01R_s, & r(i) < 1.1R_s; \\ \min\{A \times \lg[r(i-1)], \Delta\theta \times r(i-1)\}, & \\ r(i) < 3.5R_s, \quad A = 0.01/\lg(1.09); & \\ \Delta\theta \times r(i-1), & r(i) > 3.5R_s. \end{cases} \quad (7)$$

按照以上方法进行操作可以得到网格系统. 在数值计算过程中, 还需用到控制体的一些几何信息, 例如体心、面心及 Gauss 点. 本文采用的控制体

是六面体网格, 如图 2 所示. 为降低直接求得这些几何信息的复杂性, 可以通过三线性变换 (Trilinear Transformation)^[24,25], 进而参考单位立方体单元的几何信息, 求得物理空间六面体上的几何信息.

控制体与单位立方体之间的三线性变换为

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(p, q, r) &= \mathbf{A} + \mathbf{B}p + \mathbf{C}q + \mathbf{D}r + \mathbf{E}pq + \\ &\quad \mathbf{F}pr + \mathbf{G}qr + \mathbf{H}pqr. \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ 为变换系数. 只要确保单位立方体与六面体顶点之间的转换关系^[24], 就可以保证其内部点之间的一一对应关系. 变化系数如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{X}_{000}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{X}_{100} - \mathbf{A}, \\ \mathbf{C} &= \mathbf{X}_{010} - \mathbf{A}, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{X}_{001} - \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{X}_{110} - \mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{C}, \\ \mathbf{F} &= \mathbf{X}_{101} - \mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{D}, \\ \mathbf{G} &= \mathbf{X}_{011} - \mathbf{A} - \mathbf{C} - \mathbf{D}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{X}_{111} - \mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{C} - \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{F} - \mathbf{G}. \end{aligned} \quad (9)$$

利用转换关系, 通过雅克比矩阵 $\mathbf{J} = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(p, q, r)} \right|$ 可以计算控制体的体积分和面积分等. 例如函数 $g(\mathbf{X})$ 在控制体上的积分与参考立方体积分形式可表示为

$$I = \iiint g(\mathbf{X}) dv = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 g(\mathbf{X}) \det \mathbf{J} dp dq dr.$$

球坐标系下, $[r_{i-1}, r_i] \times [\theta_{i-1}, \theta_i] \times [\phi_{i-1}, \phi_i]$ 顶点的连线构成了直角坐标系下控制体单元 V_i .

1.3 空间离散

采用有限体积法计算式 (4), 并将控制体上的体

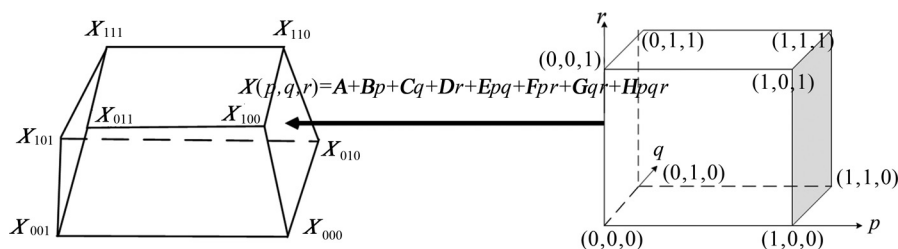


图 2 控制体与单位立方体三线性变换

Fig. 2 Trilinear transformation of the control volume and the unit cube

积分根据 Green 公式转化为控制体上的面积分. 通过面上 Gauss 点通量的加权求和得到控制体的通量为

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \iiint_{V_i} \mathbf{U} dv + \iint_{S=\partial V_i} \mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} dS + \\ & (\bar{\mathbf{Y}})_i \iint_{S=\partial V_i} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{V_i} \boldsymbol{\Psi} dv + \iiint_{V_i} \boldsymbol{\eta} dv. \end{aligned} \quad (10)$$

式 (10) 中 $(\bar{\mathbf{Y}})_i$ 可以通过积分中值定理得到, 其表示控制体内某点处的值, 是一个常数. ∂V_i 表示控制体的边界. 非粘性通量 $\mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_x(\mathbf{U})n_x + \mathbf{F}_y(\mathbf{U})n_y + \mathbf{F}_z(\mathbf{U})n_z$, 其中 $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ 为控制体的外法方向. 定义控制体的体平均值为

$$\bar{\mathbf{U}}_i = \frac{1}{|V_i|} \iiint_{V_i} \mathbf{U} dv. \quad (11)$$

其中, $|V_i|$ 为控制体 V_i 的体积, 设 N_{fi} 为控制体 V_i 面个数, S_{ij} 表示控制体 i 和 j 相邻面的面积. 式 (10) 可表达为

$$\begin{aligned} & \frac{d\bar{\mathbf{U}}_i}{dt} + \frac{1}{|V_i|} \sum_{j=1}^{N_{fi}} \left[\iint_{S_{ij}} \mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}_{ij} dS + \right. \\ & \left. (\bar{\mathbf{Y}})_i \iint_{S_{ij}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_{ij} dS \right] = \\ & \frac{1}{|V_i|} \iiint_{V_i} \boldsymbol{\Psi} dv + \frac{1}{|V_i|} \iiint_{V_i} \boldsymbol{\eta} dv. \end{aligned} \quad (12)$$

通量 $\mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}$ 的计算可利用方程的旋转不变性, 有

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_x(\mathbf{U})n_x + \mathbf{F}_y(\mathbf{U})n_y + \mathbf{F}_z(\mathbf{U})n_z = \\ & \mathbf{T}^{-1} \mathbf{F}_x(\mathbf{T}\mathbf{U}). \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{T}^{-1}$ 是旋转矩阵及其逆, 通过控制体的外法向 $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$ 和切向 $\mathbf{t}_1 = (t_{1x}, t_{1y}, t_{1z})^T$, $\mathbf{t}_2 = (t_{2x}, t_{2y}, t_{2z})^T$ 组成的右手坐标系计算.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{1x} & t_{1y} & t_{1z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{2x} & t_{2y} & t_{2z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{1x} & t_{1y} & t_{1z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{2x} & t_{2y} & t_{2z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & t_{1x} & t_{2x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_y & t_{1y} & t_{2y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_z & t_{1z} & t_{2z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_x & t_{1x} & t_{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_y & t_{1y} & t_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_z & t_{1z} & t_{2z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

当 $\sqrt{n_x^2 + n_y^2} \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{cases} t_{1x} = \frac{n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}, \\ t_{1y} = 0, \\ t_{1z} = -\frac{n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}; \end{cases} \quad \begin{cases} t_{2x} = -\frac{n_x n_y}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}, \\ t_{2y} = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}, \\ t_{2z} = -\frac{n_y n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}. \end{cases}$$

否则,

$$\begin{cases} t_{1x} = \frac{n_y}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}, \\ t_{1y} = -\frac{n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}, \\ t_{1z} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t_{2x} = \frac{n_x n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}, \\ t_{2y} = \frac{n_y n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}, \\ t_{2z} = -\sqrt{n_x^2 + n_y^2}. \end{cases}$$

记

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \quad \hat{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_1, \quad \hat{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_2, \\ & \hat{B}_1 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}, \quad \hat{B}_2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{t}_1, \quad \hat{B}_3 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{t}_2, \\ & \hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_1)\mathbf{t}_1 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_2)\mathbf{t}_2, \\ & \hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{t}_1)\mathbf{t}_1 + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{t}_2)\mathbf{t}_2, \\ & \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{T}\mathbf{U} = [\rho, \rho\hat{u}, \rho\hat{v}, \rho\hat{w}, E, \hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{B}_3, \psi]^T, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{U}) &= \mathbf{T} \times \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} \\ u \\ v \\ w \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \hat{B}_3 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} \\ \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ 0 \end{bmatrix} = \\ & \bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{T}\mathbf{U}). \end{aligned} \quad (15)$$

利用旋转不变性和式 (15), 空间离散方程为

$$\frac{d\bar{U}_i}{dt} + \frac{1}{|V_i|} \sum_{j=1}^{N_{fi}} \iint_{S_{ij}} \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{F}_x(\mathbf{T}\mathbf{U}) + \bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{T}\mathbf{U})\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_{ij}) dS = \frac{1}{|V_i|} \iiint_{V_i} \Psi dv + \frac{1}{|V_i|} \iiint_{V_i} \eta dv. \quad (16)$$

此时, $\mathbf{F}_x(\mathbf{T}\mathbf{U})$ 和 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_{ij}$ 都是界面上法向方向的通量. 求解 $\mathbf{F}_x(\mathbf{T}\mathbf{U})$ 和 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_{ij}$ 值的局地方程为

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x(\mathbf{T}\mathbf{U})}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{B}_1}{\partial \hat{x}} \bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{T}\mathbf{U}) = 0. \quad (17)$$

其中, $\hat{x}$ 代表局地法向方向. 式 (17) 与 Derigs 等^[18] 采用的形式类似, 可求得 $\hat{x} = 0$ 处的通量 $\mathbf{F}^{\text{KEPEC}}$. 式 (16) 的残余量为

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}^{\text{KEPEC}} + \frac{\partial \hat{B}_1}{\partial \hat{x}} \bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{T}\mathbf{U}) \quad (18)$$

方程的离散.

结合式 (18) 和高斯积分得到式 (16) 的半离散, 即

$$\frac{d\bar{U}_i}{dt} + \frac{1}{|V_i|} \sum_{j=1}^{N_{fi}} \sum_{k=1}^{N_g} (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R})_{j,k} \omega_{j,k} = \frac{1}{|V_i|} \iiint_{V_i} \Psi dv + \frac{1}{|V_i|} \iiint_{V_i} \eta dv. \quad (19)$$

其中, N_g 为高斯点的个数, $\omega_{j,k}$ 代表高斯点的权重.

1.4 重构

计算界面上的通量时首先需要知道守恒变量在界面上的值. 利用重构可通过体平均值获得界面上的值. 重构是整个模拟的关键, 直接影响算法最后的精度.

最小二乘重构的核心思想是利用周围的网格点构造一个超定方程组, 并通过利用最小二乘法求解重构系数. 这里使用六面体直接相邻的 6 个控制体, 构造一个二阶精度的重构. 在当前网格重心处对函数进行泰勒展开, 有

$$u_j = u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i (x_j - x_i) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i (y_j - y_i) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_i (z_j - z_i). \quad (20)$$

其中, $j = 1, 2, \dots, 6$, u_j 体平均值, 需要计算一阶导数 $[\partial u / \partial x, \partial u / \partial y, \partial u / \partial z]$. 式 (20) 是一个超定方

程, 通过最小二乘法求解. 式 (20) 写成矩阵的形式为 $\mathbf{A}\mathbf{d}\mathbf{u} = \mathbf{f}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 - x_i & y_1 - y_i & z_1 - z_i \\ x_2 - x_i & y_2 - y_i & z_2 - z_i \\ x_3 - x_i & y_3 - y_i & z_3 - z_i \\ x_4 - x_i & y_4 - y_i & z_4 - z_i \\ x_5 - x_i & y_5 - y_i & z_5 - z_i \\ x_6 - x_i & y_6 - y_i & z_6 - z_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} u_1 - u_i \\ u_2 - u_i \\ u_3 - u_i \\ u_4 - u_i \\ u_5 - u_i \\ u_6 - u_i \end{bmatrix}.$$

这里使用加权的最小二乘法进行求解. 在 $\mathbf{A}\mathbf{d}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ 两边同时乘以加权因子, 有

$$\omega \mathbf{A}\mathbf{d}\mathbf{u} = \omega \mathbf{f}. \quad (21)$$

其中, $\omega = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6)$ 为对角矩阵. 加权因子有很多种^[26], 最常用的加权因子为

$$\omega_j = \frac{1}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}}. \quad (22)$$

在数值模拟过程中, 通过式 (21) 对原始变量 ρ, u, v, w, p, ψ 进行重构. 在 MHD 的数值模拟中保持 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 很重要. 可以将 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 作为一个限制条件, 加进最小二乘重构方程, 即求解下面的方程:

$$\begin{bmatrix} \chi & \mathbf{0}_{6 \times 3} & \mathbf{0}_{6 \times 3} \\ \mathbf{0}_{6 \times 3} & \chi & \mathbf{0}_{6 \times 3} \\ \mathbf{0}_{6 \times 3} & \mathbf{0}_{6 \times 3} & \chi \\ \mathbf{I}_1 & \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \times \mathbf{H} = \mathbf{P},$$

其中,

$$\chi = \begin{bmatrix} \delta_1 & \xi_1 & \zeta_1 \\ \delta_2 & \xi_2 & \zeta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_6 & \xi_6 & \zeta_6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I}_1 = [1 \ 0 \ 0],$$

$$\mathbf{I}_2 = [0 \ 1 \ 0],$$

$$\mathbf{I}_3 = [0 \ 0 \ 1],$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} & \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial B_y}{\partial z} \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} \quad \frac{\partial B_z}{\partial y} \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} \right]^T, \\
\mathbf{P} = & \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_6 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_6 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_6 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \\
& \delta_n = \omega_n(x_n - x_i), \\
& \xi_n = \omega_n(y_n - y_i), \quad \zeta_n = \omega_n(z_n - z_i), \\
& \eta_n = \omega_n[(B_x)_n - (B_x)_i], \quad \rho_n = \omega_n[(B_y)_n - (B_y)_i], \\
& \varphi_n = \omega_n[(B_z)_n - (B_z)_i], \quad n = 1, 2, \dots, 6. \quad (23)
\end{aligned}$$

由于需要尽可能地保持 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, Hopkins^[27] 提出在最小二乘过程中对导数进行限制, 使磁场散度尽可能接近于 0. 数值计算的解是不连续的, 无法用连续函数的方式来计算磁场散度, 这里采取散度原始定义计算, 即

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \mathbf{B})_i &= \frac{1}{V_i} \iiint_{V_i} \nabla \cdot \mathbf{B} dv = \\
& \frac{1}{V_i} \iint_{\partial V_i} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \\
& \frac{1}{V_i} \sum_{j=1}^6 \iint_{S_{ij}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_{ij} dS = \\
& \frac{1}{V_i} \sum_{j=1}^6 \mathbf{B}_{ij} \cdot \mathbf{S}_{ij}. \quad (24)
\end{aligned}$$

其中, $\mathbf{S}_{ij}$ 为控制体面 (这里使用的是六面体, $j = 1, \dots, 6$), 同时 S_{ij} 又代表每个面的面积, $\mathbf{n}_{ij}$ 为外法向, $\mathbf{S}_{ij} = \mathbf{n}_{ij} S_{ij}$. $\mathbf{B}_{ij}$ 为磁场在面心处的取值, 这里取相邻网格重构值的算术平均 $\mathbf{B}_{ij} = \frac{\mathbf{B}_{ij,L} + \mathbf{B}_{ij,R}}{2}$. 因此, 数值形式的磁场散度为

$$\begin{aligned}
V_i (\nabla \cdot \mathbf{B})_i &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 (\mathbf{B}_{ij,L} + \mathbf{B}_{ij,R}) \cdot \mathbf{S}_{ij} = \\
& \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 [\mathbf{B}_i + (\nabla \otimes \mathbf{B})_i \cdot (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i) + \\
& \mathbf{B}_j + (\nabla \otimes \mathbf{B})_j \cdot (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_j)] \cdot \mathbf{S}_{ij}. \quad (25)
\end{aligned}$$

式中, $\mathbf{x}_{ij}$ 代表控制体 i 和 j 相邻面的面心, 符号 $\otimes$

和 “ $\cdot$ ” 分别表示外积和内积. 具体计算如下:

$$\begin{aligned}
\nabla \otimes \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B}^T &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} [B_x, B_y, B_z] = \\
& \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} & \frac{\partial B_y}{\partial z} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \otimes \mathbf{B})_i \cdot (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i) &= \\
(\nabla \otimes \mathbf{B})_i^T (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i) &= \\
\begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ij} - x_i \\ y_{ij} - y_i \\ z_{ij} - z_i \end{bmatrix}. \quad (27)
\end{aligned}$$

为了使等式尽快接近 0, 式 (25) 右边的 $(\nabla \otimes \mathbf{B})_i$ 需满足某些限制. 假设其他梯度 $(\nabla \otimes \mathbf{B})_j$ 已经确定. 定义等式

$$S_0 = \sum_{j=1}^6 [\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_j + (\nabla \otimes \mathbf{B})_j \cdot (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_j)] \cdot \mathbf{S}_{ij}. \quad (28)$$

令式 (25) 等于零, 有

$$\sum_{j=1}^6 (\nabla \otimes \mathbf{B})_i \cdot (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{S}_{ij} = -S_0. \quad (29)$$

定义算子 $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij} B_{ij}$, 令 $\mathbf{Q} = \sum_{j=1}^6 (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{S}_{ij}$, 式 (29) 等价于

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^6 (\nabla \otimes \mathbf{B})_i \cdot (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{S}_{ij} = \\
& (\nabla \otimes \mathbf{B})_i : \sum_{j=1}^6 (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i) \otimes \mathbf{S}_{ij} = \\
& (\nabla \otimes \mathbf{B})_i : \mathbf{Q} = -S_0. \quad (30)
\end{aligned}$$

因此, 只要 $(\nabla \otimes \mathbf{B})_i$ 满足

$$(\nabla \otimes \mathbf{B})_i : \mathbf{Q} = -S_0, \quad (31)$$

就可以使 $V_i(\nabla \otimes \mathbf{B})_i = 0$. 但是利用最小二乘法得到的梯度并不满足式 (31), 假设 $(\nabla \otimes \mathbf{B})_{i,0}$ 通过最小二乘法得到, 为了使梯度满足约束要求, 需要对梯度进行修正, 使修正后的梯度满足式 (31), 有

$$(\nabla \otimes \mathbf{B})_i = (\nabla \otimes \mathbf{B})_{i,0} + \mathbf{G}. \quad (32)$$

满足该条件的修正量有多种, 为了确保修正量唯一, 还需增加一个约束——修正量的 Frobenius 范数最小, 即

$$g = \min \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 (G^{ab})^2. \quad (33)$$

将式 (32) 代入式 (31), 得

$$\mathbf{G} : \mathbf{Q} = -[S_0 + (\nabla \otimes \mathbf{B})_{i,0} : \mathbf{Q}]. \quad (34)$$

式 (34) 两边同时除以 $|\mathbf{Q}| = (\mathbf{Q} : \mathbf{Q})^{1/2}$ 得到

$$\mathbf{G} : \hat{\mathbf{Q}} = |\mathbf{Q}| \frac{-(S_0 + (\nabla \otimes \mathbf{B})_{i,0} : \mathbf{Q})}{\mathbf{Q} : \mathbf{Q}} = g_0. \quad (35)$$

其中, $\hat{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{Q}}{|\mathbf{Q}|}$, g_0 是一个常数. $\mathbf{G}$ 是将要被确定的量, 这里假设 $\mathbf{G} = g_0 \cdot \mathbf{X}$ ($\mathbf{X}$ 为未知数), 式 (35) 可改写为 $\mathbf{X} : \hat{\mathbf{Q}} = 1$. 约束 $h = \min \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 (X^{ab})^2$.

设

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{13} \\ \hat{Q}_{21} & \hat{Q}_{22} & \hat{Q}_{23} \\ \hat{Q}_{31} & \hat{Q}_{32} & \hat{Q}_{33} \end{bmatrix}.$$

此时, 问题转换成一个带条件约束的极值问题, 即

$$\begin{cases} h = \min(x_{11}^2 + x_{12}^2 + x_{13}^2 + x_{21}^2 + x_{22}^2 + \\ x_{23}^2 + x_{31}^2 + x_{32}^2 + x_{33}^2), \\ x_{11}\hat{Q}_{11} + x_{12}\hat{Q}_{12} + x_{13}\hat{Q}_{13} + x_{21}\hat{Q}_{21} + x_{22}\hat{Q}_{22} + \\ x_{23}\hat{Q}_{23} + x_{31}\hat{Q}_{31} + x_{32}\hat{Q}_{32} + x_{33}\hat{Q}_{33} = 1. \end{cases} \quad (36)$$

使用拉格朗日乘子法, 可以求得 $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{Q}}$. $\mathbf{G}$ 的表达式为

$$\mathbf{G} = -\mathbf{Q} \frac{[S_0 + (\nabla \otimes \mathbf{B})_{i,0} : \mathbf{Q}]}{\mathbf{Q} : \mathbf{Q}}. \quad (37)$$

上述计算过程中假设 $(\nabla \otimes \mathbf{B})_j$ 已知, 而实际上二者之间是相互依赖的, 因此 $(\nabla \otimes \mathbf{B})_j$ 是未知的. 这里使用迭代方式求解, 即

$$(\nabla \otimes \mathbf{B})_i^{(k)} = (\nabla \otimes \mathbf{B})_{i,0} -$$

$$\mathbf{Q} \frac{[S_0^{(k-1)} + (\nabla \otimes \mathbf{B})_{i,0} : \mathbf{Q}]}{\mathbf{Q} : \mathbf{Q}}$$

$$S_0^{(k-1)} = \sum_{j=1}^6 [\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_j + (\nabla \otimes \mathbf{B})_j^{(k-1)}.$$

$$(\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_j)] \cdot \mathbf{S}_{ij}. \quad (38)$$

其中, k 表示迭代次数 (通过实验发现, 50 次效果较好), 取 $(\nabla \otimes \mathbf{B})_i^{(0)} = (\nabla \otimes \mathbf{B})_{i,0}$, 即将最小二乘法得到的梯度作为迭代的输入值.

1.5 通量

计算出界面上的重构值之后, 下一步需要计算通量. 这里使用熵稳定的通量. 根据旋转不变性, 通量积分可以简化为只计算一维通量的情况, 记 $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_x(\hat{\mathbf{U}})$, 一维方程可以表达为

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{B}}_1}{\partial \hat{x}} \bar{\mathbf{Y}}(\hat{\mathbf{U}}) = \mathbf{0}. \quad (39)$$

一维 GLM-MHD 的特征值为

$$\lambda_{\pm f}^x = \hat{u} \pm c_f, \quad \lambda_{\pm s}^x = \hat{u} \pm c_s, \quad \lambda_{\pm a}^x = \hat{u} \pm c_a,$$

$$\lambda_E^x = \hat{u}, \quad \lambda_{\pm \psi}^x = \frac{1}{2}\hat{u} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\hat{u}^2 + 4c_h^2},$$

$$c_a^2 = b_1^2,$$

$$c_{f,s}^2 = \frac{1}{2} \left[a^2 + \|\mathbf{b}\|^2 \pm \sqrt{(a^2 + \|\mathbf{b}\|^2)^2 - 4a^2b_1^2} \right],$$

$$a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}, \quad \mathbf{b} = \frac{\hat{\mathbf{B}}}{\sqrt{\rho}}.$$

为了得到熵守恒的通量, 首先定义熵密度

$$S(\hat{\mathbf{U}}) = -\frac{\rho s}{\gamma - 1}. \quad (40)$$

其中, $s = \ln \frac{p}{\rho^\gamma} = -(\gamma - 1)\ln \rho - \ln \beta - \ln 2$, $\beta = \frac{\rho}{2p}$.

熵变量的定义为 $\mathbf{V} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{U}}$. 定义熵势能为^[28]

$$\begin{aligned} \Psi &= \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{F}} - \hat{u}S + \phi \hat{B}_1 = \\ &\rho \hat{u} + \beta \hat{u} \|\hat{\mathbf{B}}\|^2 + 2\beta c_h \hat{B}_1 \psi. \end{aligned} \quad (41)$$

熵通量方程需要满足

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{F}}^* &= \llbracket \rho \hat{u} \rrbracket + \llbracket \beta \hat{u} \|\mathbf{B}\|^2 \rrbracket + \\ &2c_h \llbracket \beta \psi \hat{B}_1 \rrbracket - 2\{\{\hat{B}_1\}\} \llbracket \beta(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \rrbracket. \end{aligned} \quad (42)$$

其中, $[\cdot] := (\cdot)_R - (\cdot)_L$ 表示物理量的差. 通过求解式 (42) 可得熵守恒的通量

$$\hat{\mathbf{F}}' = \begin{bmatrix} \rho^{\ln}\{\{\hat{u}\}\} \\ \rho^{\ln}\{\{\hat{u}\}\}^2 + \bar{p} - \{\{\hat{B}_1\}\}^2 \\ \rho^{\ln}\{\{\hat{u}\}\}\{\{\hat{v}\}\} - \{\{\hat{B}_1\}\}\{\{\hat{B}_2\}\} \\ \rho^{\ln}\{\{\hat{u}\}\}\{\{\hat{w}\}\} - \{\{\hat{B}_1\}\}\{\{\hat{B}_3\}\} \\ \hat{F}'_5 \\ c_h\{\{\psi\}\} \\ \{\{\hat{u}\}\}\{\{\hat{B}_2\}\} - \{\{\hat{v}\}\}\{\{\hat{B}_1\}\} \\ \{\{\hat{u}\}\}\{\{\hat{B}_3\}\} - \{\{\hat{w}\}\}\{\{\hat{B}_1\}\} \\ c_h\{\{\hat{B}_1\}\} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

其中,

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{\{\{\rho\}\}}{2\{\{\beta\}\}} + \frac{1}{2}(\{\{\hat{B}_1^2\}\} + \{\{\hat{B}_2^2\}\} + \{\{\hat{B}_3^2\}\}), \\ \hat{F}'_5 &= \hat{F}'_1 \left[\frac{1}{2(\gamma-1)\beta^{\ln}} - \frac{1}{2}(\{\{\hat{u}^2\}\} + \{\{\hat{v}^2\}\} + \{\{\hat{w}^2\}\}) \right] + \hat{F}'_2\{\{\hat{u}\}\} + \hat{F}'_3\{\{\hat{v}\}\} + \hat{F}'_4\{\{\hat{w}\}\} + \\ &\quad \hat{F}'_6\{\{\hat{B}_1\}\} + \hat{F}'_7\{\{\hat{B}_2\}\} + \hat{F}'_8\{\{\hat{B}_3\}\} + \\ &\quad \hat{F}'_9\{\{\psi\}\} - \frac{1}{2}(\{\{\hat{u}\hat{B}_1^2\}\} + \{\{\hat{u}\hat{B}_2^2\}\} + \\ &\quad + \{\{\hat{u}\hat{B}_3^2\}\})\{\{\hat{B}_1\}\}(\{\{\hat{u}\hat{B}_1\}\} + \\ &\quad \{\{\hat{v}\hat{B}_2\}\} + \{\{\hat{w}\hat{B}_3\}\}) - c_h\{\{\psi\hat{B}_1\}\}. \end{aligned} \quad (44)$$

其中, $\{\{\cdot\}\} := \frac{((\cdot)_L + (\cdot)_R)}{2}$ 表示算术平均, $(\cdot)^{\ln} = \frac{[\cdot]}{[\ln(\cdot)]}$ 表示对数平均.

但是仅有熵守恒的通量是不够的. 如果方程的解存在间断, 则熵方程不守恒^[29]. 根据热力学第二定律, 动能和磁能可以被转换成热能. 因此, 熵守恒的通量中需要添加一个耗散项 $\frac{1}{2}\mathbf{D}[\mathbf{U}]$, 其中 $\mathbf{D}$ 为正定矩阵. 利用正定矩阵二项式大于零的特点可以保证熵不等式. 常用的耗散矩阵为 Lax-Fridrichs 和 Roe 型, Lax-Fridrichs 耗散矩阵为单位矩阵乘以最大的特征值, 而 Roe 型耗散矩阵格式相对复杂, 需要用到特征值和特征向量, 见文献 [17]. 为了简化计算, 这里使用 Lax-Fridrichs 型耗散项, 完整的熵通量表达式为 $\hat{\mathbf{F}}_{\text{Lax}} = \hat{\mathbf{F}}' - \frac{1}{2}|\lambda_{\max}|[\mathbf{U}]$.

1.6 α 与 c_h 的取值

在散度校正方程中, α 用于传播磁场散度, 校正

方程可以表达为

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \nabla \cdot (c_h \mathbf{B}) = -\alpha \psi_1. \quad (45)$$

Dedner 等^[10] 给出了另外一种表达方式:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \nabla \cdot (c_h^2 \mathbf{B}) = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi_2. \quad (46)$$

借鉴 Dedner 的思想, 可以通过下述方式定义 α , 式 (45) 左乘 c_h , 有

$$\frac{\partial c_h \psi_1}{\partial t} + \nabla \cdot (c_h^2 \mathbf{B}) = -\alpha c_h \psi_1. \quad (47)$$

对比式 (46) 和 (47), 可得

$$\psi_2 = c_h \psi_1, \quad -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi_2 = -\alpha c_h \psi_1. \quad (48)$$

由式 (48) 可以求得 $\alpha = \frac{c_h^2}{c_p^2}$. 对于变量 c_p 的取值, Dedner 设 $c = \frac{\Delta h c_h}{c_p^2}$ 为在 $[0, 1]$ 区间内的常量, 这里取 $c = 0.9$. Δh 为计算区域内最小的网格尺寸,

$$\Delta h = \min_{\Omega}(\min(dr, rd\theta, r \sin \theta d\phi)).$$

定义控制方程中 α 的取值为

$$\alpha = \frac{cc_h}{\Delta h}. \quad (49)$$

其中, 磁场散度传播速度 c_h 取值为计算区域内最大的特征速度.

1.7 初始条件和边界

理想 MHD 方程组中包含密度 ρ 、温度 T (或者压强 p)、速度 $\mathbf{u}$ 、磁场 $\mathbf{B}$ 等共 8 个物理参数. 等离子参数初始分布可以通过太阳风的 Parker 一维模型得到, 磁场三维空间初始分布可以利用势场模型给出.

Parker 模型^[30] 是一维球对称模型, 通过求解其积分方程可以得到任意日心距 r 的速度 u_r . 得到速度分布后, 通过连续性方程可得密度 ρ , 利用多方关系可得温度 T (或者压强 p). 多方指数 γ 大小可以调节, 这里设定为 1.57. 速度的其余两个分量 u_θ , u_ϕ 均设为 0.

势场模型^[31] 假设在日面以上的三维空间不存在电流, 球面以外的空间磁场可以用标量函数的梯度描述, 即 $\mathbf{B} = -\nabla\phi$. 底部以文献 [31] 的观测磁图作为边界条件, 假设光球层磁场主要沿着径向方向, 将视向磁场转换成径向磁场. 利用球谐函数展开法求

解拉普拉斯方程 $\nabla^2 \phi = 0$, 可得势函数 ϕ 以及 $\mathbf{B}$ 的分布. 球谐函数展开的最大级数为自由参数, 这里设 $L_{\max} = 15$.

本文共有三类边界需要处理: ① $1 R_s$ 处的内边界; ② 片与片之间的水平边界; ③ 处于行星际空间的外边界. 对于内边界, 这里采用固定的边界; 片与片之间的边界可通过相邻网格线性插值获取; 对于行星际空间的外边界, 由于其是超声速的, 可采用网格线性外推的方式获取太阳风参数.

1.8 时间积分

时间离散采用三阶龙格库塔法, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(1)} &= \mathbf{U}^n + \Delta t \mathbf{R}(\mathbf{U}^n), \\ \mathbf{U}^{(2)} &= \frac{3}{4} \mathbf{U}^n + \frac{1}{4} [\mathbf{U}^{(1)} + \Delta t \mathbf{R}(\mathbf{U}^{(1)})], \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \frac{1}{3} \mathbf{U}^n + \frac{2}{3} [\mathbf{U}^{(2)} + \Delta t \mathbf{R}(\mathbf{U}^{(2)})]. \end{aligned} \quad (50)$$

其中, 时间步长 Δt 由 CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 稳定条件决定, 有

$$\Delta t = \delta_{\text{CFL}} \frac{\Delta h}{c_h}. \quad (51)$$

这里 $\delta_{\text{CFL}} = 0.5$ 为 CFL 数, $\Delta h = \min(\min(dr, rd\theta, r \sin \theta d\phi))$ 取网格系统的几何尺寸度量, c_h 取最大的特征速度.

2 数值结果

利用上述模型, 对卡林顿周 2087 (CR 2087: 2009 年 8 月 20 日至 9 月 16 日) 进行模拟. 这一时期处于第 23 个太阳活动周的极小期, 太阳表面比较平静, 没有大的活动区. 此外, 近地卫星 ACE/WIND 没有探测到任何日冕物质抛射事件, 因此比较适合作为背景太阳风的模拟测试. 在数值实验中, 首先给定日冕底部边界条件和计算区域初始条件, 然后进行松弛迭代, 直至达到稳态, 从而得到日冕背景太阳风的三维结构. 将这里的模拟结果与其他方法得到的结果进行对比, 分析格式中采用受约束的最小二乘重构 (最小二乘 + 磁场修正) 来控制磁场散度的实际效果.

2.1 磁场散度

首先比较使用带磁场修正和未带磁场修正的最小二乘重构对消去磁场散度的效果. 采用受约束的最小二乘重构中, 设每个时间步使用 5 次的迭代修

正, 松弛达到稳态, 具体结果如图 3 所示. 图 3(a) 按照如下的公式计算磁场散度误差:

$$\varepsilon(\nabla \cdot \mathbf{B}) = \frac{\sum_{i=1}^M |(\nabla \cdot \mathbf{B})_i| V_i}{\sum_{i=1}^M V_i}. \quad (52)$$

其中, M 为计算区域的网格数目, $(\nabla \cdot \mathbf{B})_i$ 可以通过高斯散度理论计算, 即

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{B})_i &= \iiint_{V_i} \nabla \cdot \mathbf{B} dv / \iiint_{V_i} dv = \\ &= \iint_{\partial V_i} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} / \iiint_{V_i} dv. \end{aligned} \quad (53)$$

图 3(b) 是将式 (52) 计算得到的磁场散度误差取对数 $\lg(\varepsilon(\nabla \cdot \mathbf{B}))$ 后的结果. 从图 3(b) 可以看出: 最小二乘重构时, 磁场散度的最大值为 1.6; 而使用带磁场修正的最小二乘重构后, 磁场散度的最大值降低到 0.2, 比前者约低 1 个量级. 初始分布磁场散度很小, 松弛开始后磁场散度迅速增加, 在第 10 h 附近达到最大值, 峰值分别为 $10^{-4.9}$ 和 $10^{-5.3}$, 后者比前者低 0.4 个量级. 又经过大约 5 h, 前者下降到 $10^{-5.1}$ 后趋于稳定, 之后随着时间推移略有增加; 后者在峰值后逐渐下降, 最后稳定在 $10^{-5.8}$. 因此, 带磁场修正的最小二乘重构可以明显抑制磁场散度累积, 每个时间步仅使用 5 次修正迭代即可达到一定的消除磁场散度的效果.

为进一步验证受约束的最小二乘重构消除磁场散度的效果, 这里尝试增加迭代次数, 结果如图 4 所示. 由图 4 可以看出: 使用 10 次迭代时, 磁场散度的最大值为 0.05; 使用 50 次迭代时, 磁场散度的最大值降低到 0.0003, 比前者低 2 个量级. 初始分布磁场散度很小, 松弛开始后磁场散度迅速增加, 在第 10 h 附近达到最大值, 峰值分别为 $10^{-5.4}$ 和 $10^{-7.7}$, 后者比前者低 2 个量级以上. 又经过 5 h 左右前者下降到 10^{-6} , 然后趋于稳定, 随着时间推移略有增加; 后者在峰值后小幅度下降, 然后稳定在 $10^{-7.8}$, 比不使用最小二乘重构低了近 3 个量级. 从上述结果可知, 利用最小二乘重构进行磁场修正时, 增加迭代次数可以提升消除磁场散度的效果. 对磁场梯度校正的次数越多, 最大磁场散度及全场平均磁场散度均变得更小.

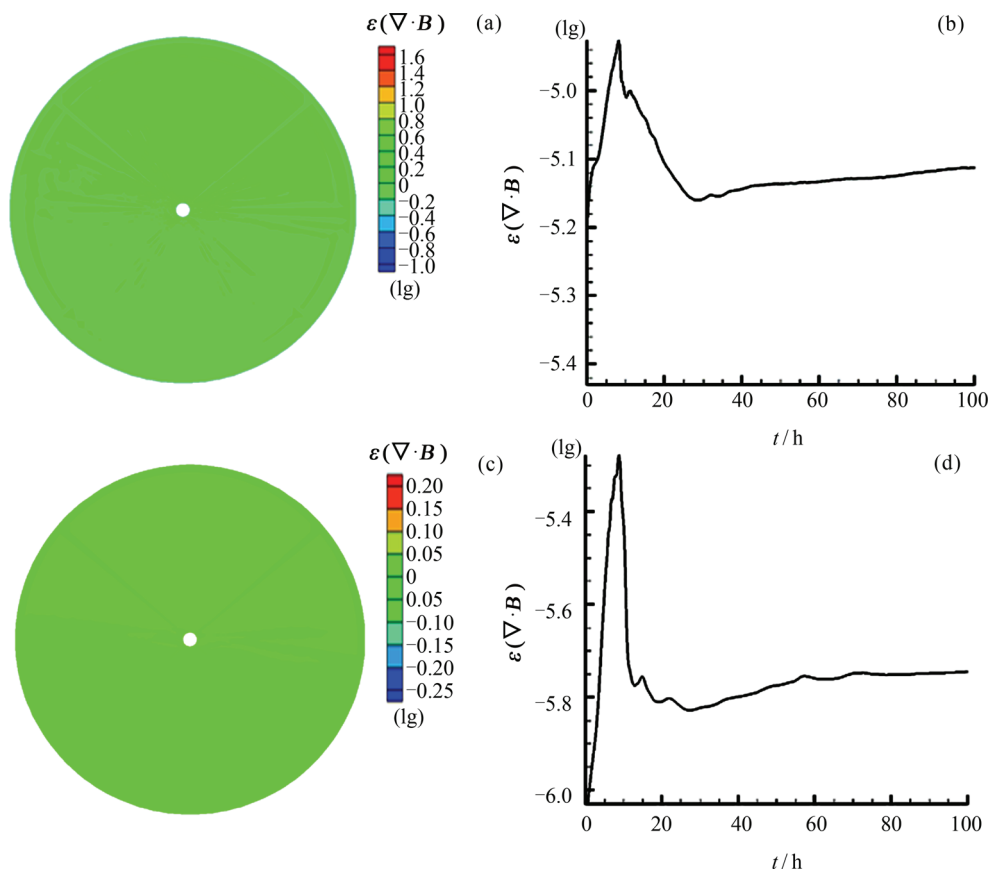


图 3 未使用磁场修正项磁场散度的分布 (a) 和磁场散度随时间变化 (b); 使用磁场修正项 (循环迭代 5 次) 磁场散度的分布 (c) 和磁场散度随时间变化 (d)

Fig. 3 Distribution (a) and change (b) of the magnetic field divergence without using magnetic field correction term, the distribution (c) and change (d) of the magnetic field divergence with the magnetic field correction term (cycle iteration 5 times)

图 5 给出了磁场散度随修正次数的变化趋势. 由图 5 可以看出, 全场磁场散度平均值刚开始下降速度明显, 随着迭代次数的增加, 磁场散度基本达到平衡, 没有明显的下降趋势. 迭代的次数越多, 程序消耗时间越长, 迭代 60 次后全场磁场散度平均值已经无明显改善. 综合考虑修正时迭代时间的消耗及超过 60 次后全场磁场散度平均值下降趋势已经不明显, 本文选择 50 次的迭代修正.

2.2 背景太阳风的稳态结构

图 6 给出了模拟的 CR 2087 的太阳风参数在两个不同子午面上的分布. 图 6(a) (c) 分别为 $\phi = 180^\circ - 0^\circ$ 和 $\phi = 270^\circ - 90^\circ$ 两个子午面上的径向速度 v_r , 图 6(b) (d) 为相应的太阳风等离子体数密度的对数 N . 黑色线为磁力线, 箭头表示磁场方向. 从图 6 可以看出, 太阳风高速流源于极区冕洞, 在径向膨胀过程中速度迅速增加, 大约在 $10 R_s$ (R_s 表示太

阳半径) 处加速到 $500 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ 以上, $10 R_s$ 之外的区域太阳风加速过程变慢, 但仍然有较大的加速作用. 高纬区域太阳风在膨胀过程中携带着开放磁力线进入行星际, 并且有向低纬度区域压缩的趋势. 在低纬度区域 $5 R_s$ 以内, 速度呈盔状流结构, 对应区域磁力线为闭合结构, 磁场将等离子体束缚在太阳附近. 在超过 $5 R_s$ 的区域, 闭合磁力线逐渐打开, 最终磁场完全开放并伴随着太阳风进入行星际. 在盔状流之上可以看到一个薄的电流片, 其基本位于赤道面附近, 电流片两边磁场极性相反, 周围的太阳风为低速流, 速度低于 $350 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. 太阳风密度和速度大体上呈反相关, 在同一径向位置, 高纬度的高速流密度较低, 电流片附近的低速流密度相对较高. 随着太阳风的径向膨胀, 速度增加的过程中, 等离子体越来越稀薄. 上述这些特征与 Ulysses 卫星观测到的结果一致.

图 7 给出了模拟的 CR 2087 太阳风稳定状态时

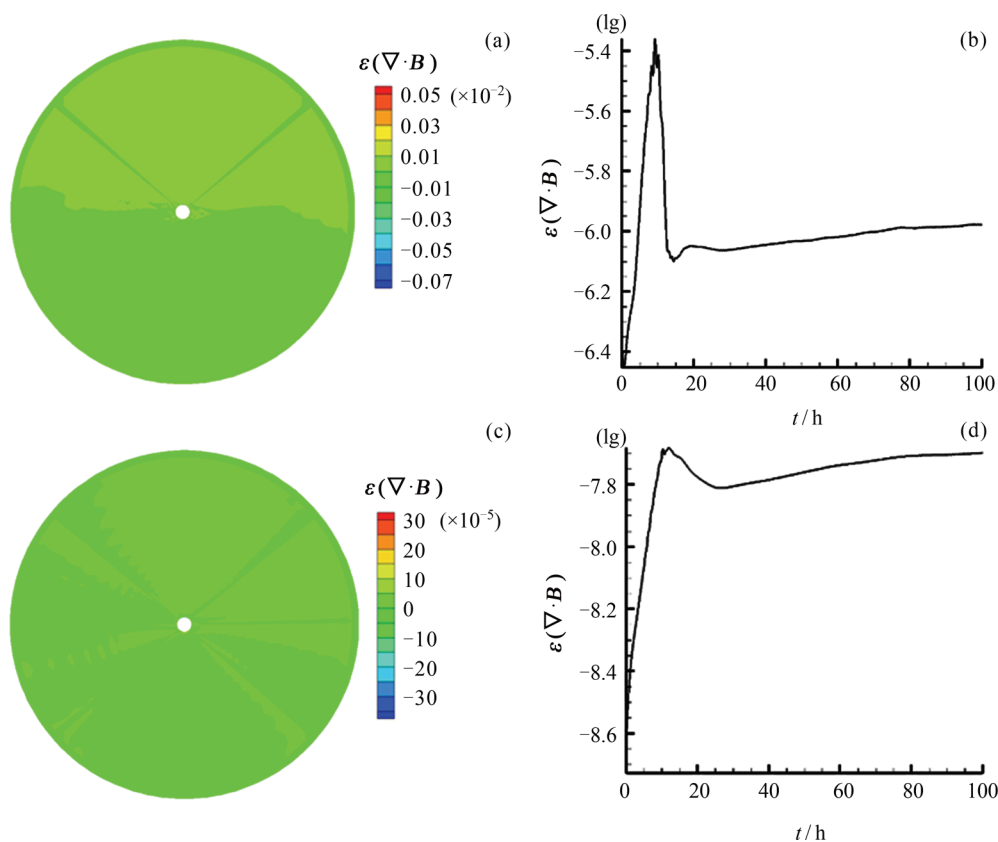


图 4 使用磁场修正项 (循环迭代 10 次) 磁场散度的分布 (a) 和磁场散度随时间变化 (b), 使用磁场修正项 (循环迭代 50 次) 磁场散度的分布 (c) 和磁场散度随时间变化 (d)

Fig. 4 Distribution (a) and change (b) of the magnetic field divergence with the magnetic correction term (cycle iteration 10 times), the distribution (c) and change (d) of the magnetic field divergence with the magnetic field correction term (cyclic iteration 50 times)

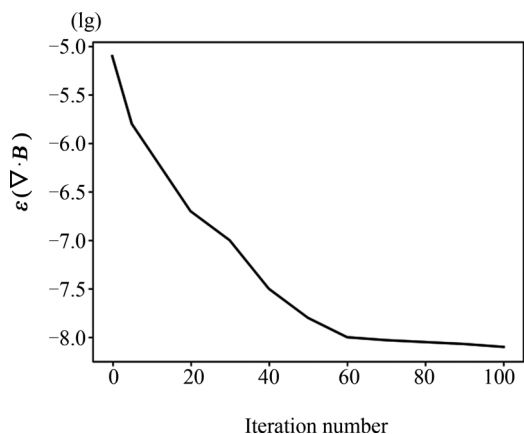


图 5 全场磁场散度变化趋势

Fig. 5 Change of the whole magnetic field divergence

$2.5 R_s$ 和 $20 R_s$ 球面上的数密度 N 和速度 v_r . 从图 7 可以看出, 随着日心距离的增加, 密度逐渐减小, 而速度逐渐增加. 极区或者开场区速度较高, 密度较低;

日球层电流片附近速度较低, 密度较高. 这些与图 6 的特征是对应的. 此外, 低纬度区域的太阳风低速流范围随着日心距离增加而变窄, 高速流与低速流之间过渡区域的速度梯度也变得更陡峭. 电流片的位置变化非常小, 这是由于磁冻结效应, 使得低纬区域的高速太阳风基本沿着径向膨胀, 因此电流片限制在赤道面附近.

从图 6 可以看出, 高速低密度太阳风主要在高纬度地区, 而低速高密度太阳风集中在磁中性线附近区域. 磁中性线向外延伸形成日球层电流片 (HCS). 图 8 给出了日球层电流片在该卡林顿周的三维结构. 从图 6 和图 8 可以发现, 电流片接近于一个平面.

为进一步说明太阳风参数沿径向方向的变化情况, 图 9 展示了径向速度 v_r 和数密度 N 沿着 $1 \sim 20 R_s$ 在不同纬度 $\theta = -86^\circ$ 和 $\theta = -21^\circ$ 的变化分布. $\theta = -86^\circ$ 对应于开放磁场区, $\theta = -21^\circ$ 对应于电流片附近. 在极区 ($\theta = -86^\circ$) 速度较高, 密度较

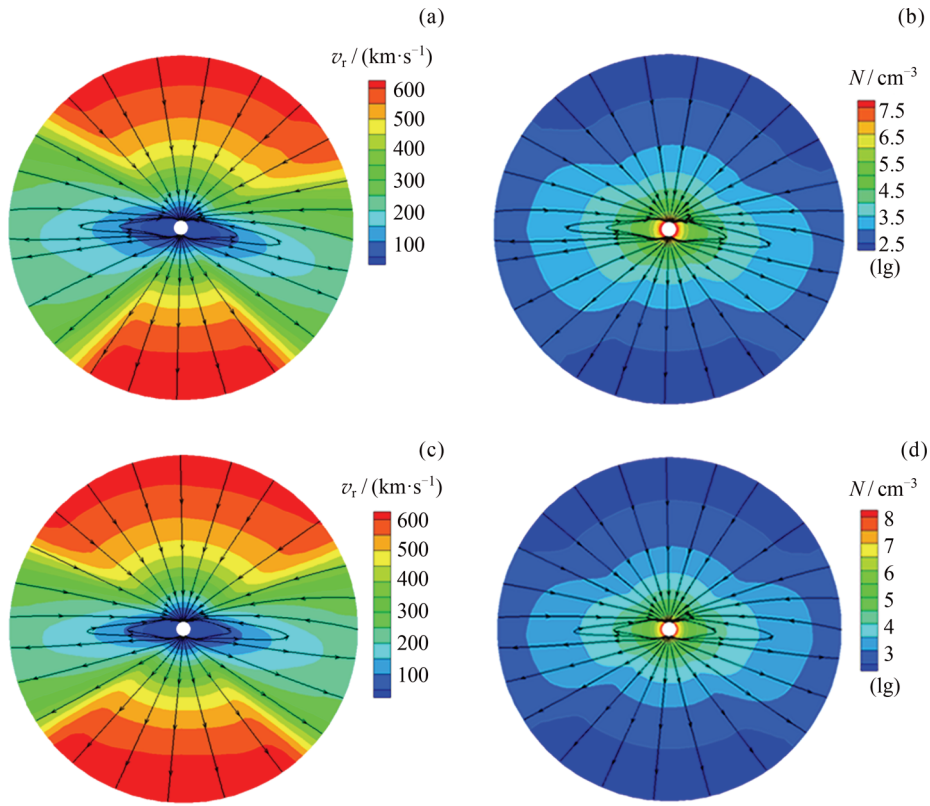


图 6 子午面 $\phi = 180^\circ - 0^\circ$ 上径向速度 (a) 和数密度的对数 (b); 子午面 $\phi = 270^\circ - 90^\circ$ 上径向速度 (c) 和数密度的对数 (d)

Fig. 6 Radial velocity (a) and logarithmic number density (b) in the meridional plane of $\phi = 180^\circ - 0^\circ$, and radial velocity (c) and logarithmic number density (d) in the meridional plane of $\phi = 270^\circ - 90^\circ$

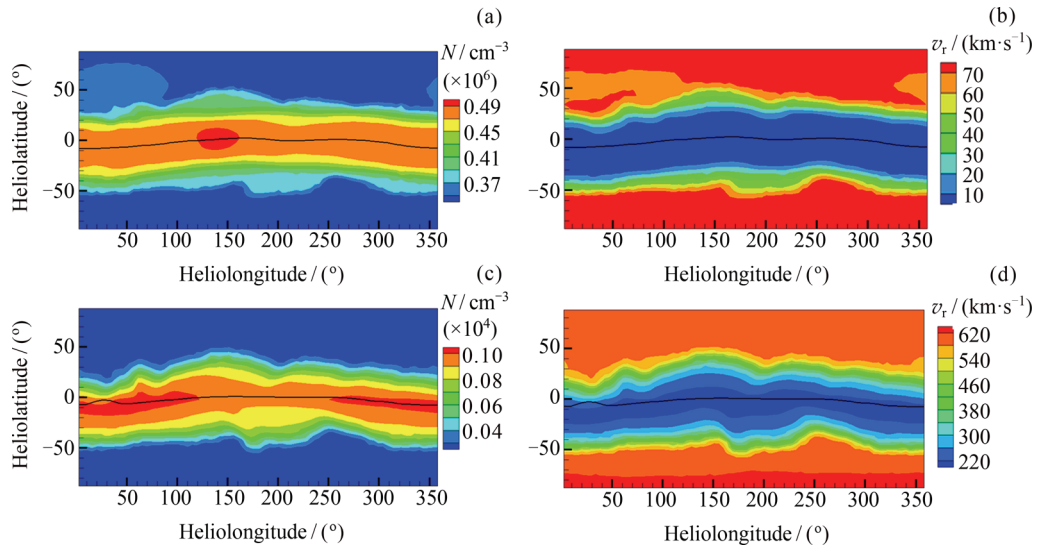


图 7 $2.5 R_s$ 处表面的数密度 (a) 和径向速度 (b), $20 R_s$ 处表面的数密度 (c) 和径向速度 (d)

Fig. 7 Number density N (a) and radial velocity v_r (b) in the surface of $2.5 R_s$ and number density N (c) and radial velocity v_r (d) in the surface of $20 R_s$

低. 太阳风速度从 $5 R_s$ 左右的约 $240 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ 上升到 $20 R_s$ 处的约 $620 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. 而在电流片附近 ($\theta = -21^\circ$) 速度较低, 密度较高. 太阳风速度从 $5 R_s$ 处的 $50 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ 上升到 $20 R_s$ 处的 $240 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

3 结论

建立了一类熵守恒格式用于太阳日冕数值模拟研究. 该数值格式利用有限体积方法求解 Ideal GLM-MHD 控制方程组; 使用带约束的最小二乘重构计算控制体面心处的原始变量, 并对磁场重构系数进行校正, 以降低磁场散度误差; 通过使用熵方程, 使构造的数值通量满足热力学第二定律所需的熵稳定条件; 时间离散采用三阶龙格库塔法. 通过对 CR 2087 进行计算, 得到以下结论.

(1) 通过数值结果对比发现, 采用最小二乘重构及磁场梯度校正, 可使磁场散度降低 1~2 个数量级.

(2) 利用熵守恒的通量, 数值格式可以满足热力学第二定律, 即使在间断出现时也可以得到正确的熵

稳定通量.

(3) 对 CR 2087 日冕的初步试验表明可以呈现定态日冕的大尺度结构.

本文模拟的 CR 2087 处于太阳活动极小期, 进一步的工作将对极大期的日冕结构进行模拟试验, 以便不断改进.

参考文献

- [1] BRACKBILL J U, BARNES D C. The effect of nonzero $\nabla \cdot \mathbf{B}$ on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations [J]. *J. Comput. Phys.*, 1980, **35**(3): 426-430
- [2] TOTH G. The $\nabla \cdot \mathbf{B}$ constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes [J]. *J. Comput. Phys.*, 2000, **161**(2): 605-652
- [3] BALSARA D S, KIM J. A comparison between divergence-cleaning and staggered-mesh formulations for numerical magnetohydrodynamics [J]. *Astrophys. J.*, 2004, **602**(2): 1079
- [4] GUILLET T, TEYSSIER R. A simple multigrid scheme for solving the poisson equation with arbitrary domain boundaries [J]. *J. Comput. Phys.*, 2011, **230**(12): 4756-4771
- [5] EVANS C R, HAWLEY J F. Simulation of magnetohydrodynamic flows – a constrained transport method [J]. *Astrophys. J.*, 1988, **332**: 659-677
- [6] YEE K. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media [J]. *IEEE Trans. Anten. Propag.*, 1966, **14**(3): 302-307



图 8 日球层电流片

Fig. 8 Solar current sheet

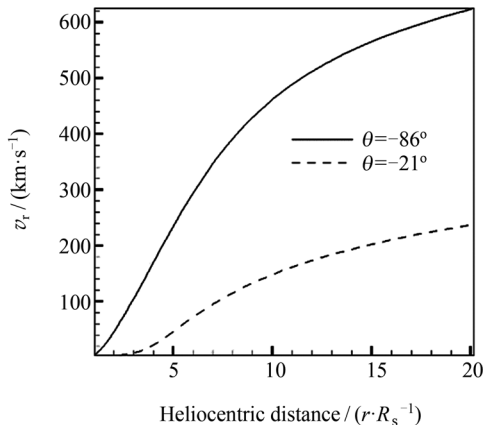
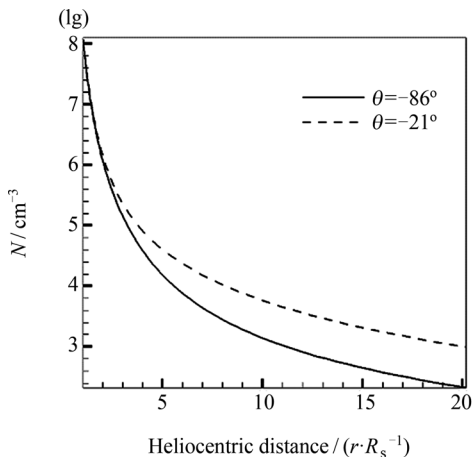


图 9 模拟 CR 2087 得到的数密度的对数 N (a) 和径向速度 v_r (b)

Fig. 9 Logarithmic number density (a) and radial velocity (b) of CR 2087 obtained by simulation

- [7] BALSARA D S. Second-order-accurate schemes for magnetohydrodynamics with divergence-free reconstruction [J]. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 2004, **151**(1): 149
- [8] DAI W, WOODWARD P R. A simple finite difference scheme for multidimensional magnetohydrodynamical equations [J]. *J. Comput. Phys.*, 1998, **142**(2): 331-369
- [9] POWELL K G, ROE P L, LINDE T J, *et al.* A solution-adaptive upwind scheme for ideal magnetohydrodynamics [J]. *J. Comput. Phys.*, 1999, **154**(2): 284-309
- [10] DEDNER A, KEMM F, KRONER D, *et al.* Hyperbolic divergence cleaning for the MHD equations [J]. *J. Comput. Phys.*, 2002, **175**(2): 645-673
- [11] FENG X, ZHANG M, ZHOU Y. A new three-dimensional solar wind model in spherical coordinates with a six-component grid [J]. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 2014, **214**(1): 6
- [12] FENG X, LI C, XIANG C, *et al.* Data-driven modeling of the solar corona by a new three-dimensional path-conservative osher-solomon MHD model [J]. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 2017, **233**(1): 10
- [13] GODUNOV S K. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics [J]. *Matemat. Sbornik*, 1959, **89**(3): 271-306
- [14] TORO E F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction* [M]. Berlin, Herdelberg: Springer, 2009
- [15] CONSTANTINE D. *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics* [M]. Berlin, Herdelberg Springer, 2016
- [16] TADMOR E. Numerical viscosity and the entropy condition for conservative difference schemes [J]. *Math. Comput.*, 1984, **43**(168): 369-381
- [17] ISMAIL F, ROE P L. Affordable, entropy-consistent Euler flux functions ii: entropy production at shocks [J]. *J. Comput. Phys.*, 2009, **228**(15): 5410-5436
- [18] DERIGS D, WINTERS A R, GASSNER G J, *et al.* Ideal GLM-MHD: about the entropy consistent nine-wave magnetic field divergence diminishing ideal magnetohydrodynamics equations [J]. *J. Comput. Phys.*, 2018, **364**: 420-467
- [19] CHANDRASHEKAR P, KLINGENBERG C. Entropy stable finite volume scheme for ideal compressible MHD on 2-d cartesian meshes [J]. *SIAM J. Num. Anal.*, 2016, **54**(2): 1313-1340
- [20] WINTERS A R, DERIGS D, GASSNER G J, *et al.* A uniquely defined entropy stable matrix dissipation operator for high mach number ideal mhd and compressible euler simulations [J]. *J. Comput. Phys.*, 2017, **332**: 274-289
- [21] TRICCO T S, PRICE D J. Constrained hyperbolic divergence cleaning for smoothed particle magnetohydrodynamics [J]. *J. Comput. Phys.*, 2012, **231**(21): 7214-7236
- [22] FENG X, XIANG C, ZHONG D, *et al.* Sip-cese MHD model of solar wind with adaptive mesh refinement of hexahedral meshes [J]. *Comput. Phys. Commun.*, 2014, **185**(7): 1965-1980
- [23] FENG X, YANG L, XIANG C, *et al.* Three-dimensional solar wind modeling from the Sun to Earth by a SIP-CESE MHD model with a six-component grid [J]. *Astrophys. J.*, 2010, **723**(1): 300
- [24] FREY A, HALL C, PORSCHING T. Some results on the global inversion of bilinear and quadratic isoparametric finite element transformations [J]. *Math. Comput.*, 1978, **32**(143): 725-749
- [25] IVAN L, DE STERCK H, SUSANTO A, *et al.* High-order central ENO finite-volume scheme for hyperbolic conservation laws on three-dimensional cubed-sphere grids [J]. *J. Comput. Phys.*, 2015, **282**: 157-182
- [26] VENKATAKRISHNAN V. Convergence to steady state solutions of the euler equations on unstructured grids with limiters [J]. *J. Comput. Phys.*, 1995, **118**(1): 120-130
- [27] HOPKINS P F. A constrained-gradient method to control divergence errors in numerical mhd [J]. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2016, **462**(1): 576-587
- [28] TADMOR E. The numerical viscosity of entropy stable schemes for systems of conservation laws [J]. *Math. Comput.*, 1987, **49**(179): 91-103
- [29] BARTH T J. Numerical methods for gas dynamic systems on unstructured meshes [M]//An Introduction to Recent Developments in Theory and Numerics for Conservation Laws. Berlin: Springer, 1999: 195-285
- [30] PARKER E N. Dynamics of the interplanetary gas and magnetic fields [J]. *Astrophys. J.*, 1958, **128**: 664
- [31] ALTSCHULER M D, NEWKIRK G. Magnetic fields and the structure of the solar corona [J]. *Solar Phys.*, 1969, **9**(1): 131-149
- [32] SHIOTA D, KATAOKA R, MIYOSHI Y, *et al.* Inner heliosphere MHD modeling system applicable to space weather forecasting for the other planets [J]. *Space Weather*, 2014, **12**(4): 187-204