博士研究生学位论文

题目：

不可压缩粘性流体基函数法的理论研究及其在动脉瘤中的应用以及肝门静脉高压症的实验和理论研究

姓名：　沈芳

学号：　10103815

系别：　力学与工程科学系

专业：　流体力学

研究方向：计算流体力学、生物流体力学

导师：　吴望一教授、严宗毅教授

2004 年 3 月

摘　要

本文分为两部分，第一部分是**三角函数基函数法在不可压缩粘性流体中的应用与研究**，第二部分是**肝门静脉高压症形成早期的血液动力学、血液流变学及病理学研究**。

这两个部分之间相互独立，其中第二部分的基本框架是在 2001 年由已逝的前任导师严宗毅教授提出的，我们进行了动物实验，随后我在此基础上构建了具体的生物力学模型，不幸的是，严宗毅教授于 2002 年 8 月去世，该课题只进行了动物实验而未能应用于人体便中途夭折；2002 年 9 月份，系里安排吴望一教授作为我后继的指导教师，接下来的时间里，我重点研究吴望一老师提出的基函数法在粘性不可压缩流动中的理论以及它在血液动力学动脉瘤中的应用，这构成本文的第一部分，也是本文的主要部分。下面简单介绍一下这两部分的内容：

基函数法是吴望一教授首先提出的一种新型的计算方法，此方法直接在非结构网格中离散微分算子。由于基函数法是在非结构网格上构造的，因而它能方便地处理复杂边界，保持边界点和内点格式的一致，并能采用自适用技术改进计算的精度。在生成一维、二维或三维非结构网格后，在网格单元上采用基函数法展开逼近真实函数，基函数可取任意正交完备函数族。在林光[9]、谢文俊[11]、李俊修[12]等人的学位论文中提出了基函数法的基本理论并采用多项式或三角函数作为基函数，数值地计算了无粘可压缩流动的一、二、三维多种典型算例，并取得了精度和分辨率都十分满意的结果。

本文试图在此基础上将基函数法拓宽到不可压缩粘性流动的数值模拟中去。我们采用 Chorin[13]提出的人工压缩性技术，构造出处理粘性不可压缩流动的新型数值方法——三角函数基函数法。为此，我们首先在二维、三维问题中，分别采用面积坐标和体积坐标，成功构造出三角函数类型一阶精度的基函数各阶导数的中心格式和迎风格式，然后引入人工压缩性系数并采用通量分裂法及中心格式和迎风格式相结合的技术，构造出可数值求解不可压缩流体二维、三维 N-S 方程的三角函数类型的基函数格式。为了验证此方法，我们首先数值地计算了有限长度的二维渠道内的流动和有限长度的圆管内流动，采用我们的方法解出的速度分布和压力分布除入口段和出口段外，与库塔流和泊肃叶流的结果十分吻合。在方法得到初步验证后，本文采用三角函数基函数法及非结构网格生成技术，进一步数值地研究了二维、三维情况下动脉瘤内的血液动力学问题，计算了定常情况下二、三维动脉瘤内的速度、压力和剪切力分布并研究了动脉瘤的几何形状、雷诺数等参数对血液动力学的影响，二维的部分结果可和文献[56]中的数值计算结果比较，符合程度令人满意。

在这一部分工作中，本文主要的**创造性成果**有：

1. 首次构造出数值求解不可压缩流体 N-S 方程的三角函数基函数格式。这是一种新型的计算格式，具有精度好，计算量小，易于处理复杂边界，格式构造统一、规范等优点；
2. 利用这一新型的计算格式计算了二维、三维动脉瘤内定常血液流动并研究了动脉瘤几何形状、雷诺数等参数对速度、压力及瘤壁剪切力分布的影响。三维动脉瘤这一部分内容未见国内外有同类报道，且对临床治疗有一定指导意义。

在附录 I 的工作中，我们还采用三角函数基函数法、非结构网格生成技术及自适应技术

研究了超音速三维球头绕流问题。三维非结构网格是采用文献[11]中提出的 Delaunay 方法和前沿推进法相结合的方法生成的，结合了二者的优势——采用前沿推进法布点，然后用 Delaunay 三角化方法对结点进行连接。这个算例的数值结果是比较令人满意的，准确度和精度都较文[11]中的好。应该指出，文[11]中采用多项式为基函数，只采用粗网格没有进行自适应，而我们则采用三角函数为基函数，并采用了自适应技术。

肝门静脉高压症（Portal hypertension，PHT）是世界范围内的一种常见病、多发病，严重影响病人的生存质量。血液动力学及流变学研究对于揭示 PHT 的发病机理，探讨其并发症出血的危险性，选择恰当的手术方式和手术时机以至检验药物的疗效等方面都有重要意义。PHT 的主要发病原因是肝硬化。在第二部分中，我们首先制备出不同肝硬化程度的大鼠四氯化碳肝硬化模型，然后测量了正常及肝硬化情况下门静脉系统主要血管的直径、长度、血流量及压力等血液动力学参数，并且测量了全血粘度、红细胞压积、红细胞变形性、血浆纤维蛋白原、血红蛋白、红细胞电泳率等常见的血液流变学参数，此外我们还进行了肝脏的组织形态学观察。血液流变学实验和组织形态学观察还首次发现了下述现象：大鼠肝硬化所导致的血液流变学指标异常，出现在形态学上呈现出典型的假小叶这一肝硬化病态特征之前的 2~3 周，这个现象还未见国内外类似报道。利用所测得的全面的血液动力学数据，本文创新性地建立了以流阻为基本元件的能同时模拟正常状态及肝硬化状态下大鼠肝门静脉系统的整体模型，该模型可以求出其它无法直接测量的血液动力学参数，并对门静脉高压症的发生做出合理解释。

在这一部分中，作者的主要**创新性**贡献有：

(1) 肝硬化时，血液流变学指标异常出现在形态学病态发生前 2~3 周，这一新发现对肝硬化临床诊断和治疗有指导意义；

(2) 本文测量了正常和肝硬化情况下较以往工作更为全面的血液动力学参数和血液流变学参数，并在此基础上首次提出肝门静脉系统整体力学模型，能同时模拟正常状态和肝硬化状态，此理论模型为研究肝门静脉高压症提供了一种新的途径。

在严宗毅教授病情比较严重的 2002 年上半年，同属于生物力学组的谭文长副教授协助严老师指导我的科研工作，完成了分数阶微积分的两个课题。在附录 II 中将经典的粘性牛顿流体和二阶流体推广到带分数阶导数的广义二阶流体，建立了带分数阶导数的广义二阶流体模型，分别研究了广义二阶流体涡流速度的衰减和温度扩散以及带有热边界的广义二阶流体 Rayleigh-Stokes 问题，并得到上述两个问题速度场和温度场的精确解。这两个准确解是作者在附录 II 中的主要贡献。

关键词： 基函数法，非结构网格，动脉瘤，粘性不可压缩流动，无粘可压缩流动，人工压缩性系数，门静脉高压症，血液动力学，血液流变学，病理学，动物实验，分数阶微积分，广义二阶流体

Abstract

This dissertation consists two parts: The first is **The research and application of trigonometric function type basic function method in incompressible viscous flow**, and the second is **The research of hemodynamics, hemorheology and pathology at early stage of Portal hypertension**.

These two parts are independent with each other. The main idea of the second part was put forward by Professor Yan Zongyi, who was my pre-mentor. We did animal experiments and I constructed biomechanical model in details based on the experiments. Unfortunately, Dr. Yan passed away in Aug. 2002, and the project came to an untimely end when we just did animal test. In Sep. 2002, Professor Wu Wangyi became my present mentor. From then on, I emphatically researched the theory of Base Function method in viscous incompressible flow proposed by Dr. Wu, and discussed the application on the hemodynamic research of aneurysm, which is the first part and also the chief part of my thesis. The main content of the two parts are introduced as below:

Basic Function method is an innovative numerical method proposed by Professor Wu Wangyi. This method can directly discrete differential operator on unstructured grids. Because the basic function method is forwarded on the unstructured grids, it can handle complex boundary, and apply self-adaptive remeshing technique to improve the precision of numerical results. Moreover, the scheme precision on the boundaries is the same as that inside by using this scheme. After the one-dimension, two-dimension or three-dimension unstructured grids are generated, the expansion of basic function is used to approach the exact function. Any orthogonal and complete family of functions can be used as basic function. In the diploma thesis of Lin Guang[9], Xie Wenjun[11], Li Junxiu[12],et.al, the basic theory of Basic Function method was put forward, many kinds of one-dimension, two-dimension and three-dimension inviscid compressible representative flow were calculated numerically, the high accuracy and resolution of which were quite satisfactory.

Basic Function method is developed into incompressible viscous flow in this paper. By using artificial compressibility proposed by Chorin[13], an innovative numerical method—trigonometric function type basic function method is constructed to deal with incompressible viscous flow. First, area coordinate and volume coordinate are used in two- and three-dimension flow to construct central and upwind schemes of derivative of first order trigonometric function type basic function; then, artificial compressibility coefficient is introduced, and the technique of flux splitting method and the combination of central and upwind schemes are applied to construct the trigonometric function type basic function scheme for solving two- and three-dimension incompressible

Navier-Stokes equations. To prove the method, flows in two-dimension channel and three-dimension pipe are solved numerically, the velocity and pressure distribution of which calculated by our method are quite same with the exact solutions of Couette flow and Poiseuille flow except in the areas of entrance and exit. After the method is proved elementary, the hemodynamics in two- and three-dimension aneurysms are researched numerically by making use of the trigonometric function type basic function and unstructured grids generation technique. In steady flow, the distribution of velocity, pressure and shear force in the two- and three-dimension aneurysms are calculated, and the influence of the shape and Reynolds number of the aneurysms to the hemodynamics is studied. Some two-dimension results accord with the numerical results from Ref.[56] quite well.

In the first part, the **innovations** include:

(1) The trigonometric function type basic function scheme for solving incompressible Navier-Stokes equations is constructed for the first time, that is a kind of new numerical method with a lot of features, such as high precision, little computation load, easiness for handle complex boundary, unified and standard scheme, et.al.

(2) Steady hemodynamics in two- and three-dimension aneurysms are calculated numerically with the new scheme, and the influence of the shape and Reynolds number of the aneurysms to the velocity, pressure and shear force is researched. The same kinds of study of the three-dimension aneurysms have not been found inside or outside of our country, and the results have instructive signification to clinic therapy.

In Appendix I, the inviscid supersonic flow around a three-dimension sphere is also solved by using trigonometric function type basic function, unstructured grids generation technique and adaptive remeshing method. The three-dimension unstructured grids are generated by advancing front method and Delaunay triangulation mentioned in Ref.[11], which combine the advantage of the two methods --- using advancing front method to set points and Delaunay triangulation to link the points. The numerical results are comparatively satisfactory, whose accuracy and precision are better than that in Ref.[11]. It should be point out that polynomial was used as basic function and no adaptive remeshing method was used in Ref.[11], but trigonometric function is used as basic function and adaptive remeshing method was used in this paper.

Portal hypertension (PHT), as a kind of diseases with a high incidence of occurrence all over the world, badly affects the patients' health. The hemodynamic and hemorheologic research plays an important role in exploring the pathogenesis of PHT, assessing the risk of hemorrhage induced by the complications, selecting the scheme and time of surgical operations as well as evaluating the curative effects of medication. Most of the PHT is caused by liver cirrhosis. In the second part, the carbon tetrachloride-induced hepatocirrhosis rats model is prepared at first. Then, many hemodynamic parameters of the main blood vessels in rats' portal vein system, such as diameter, length, blood flux, blood pressure, are measured at both normal and hepatocirrhosic stage. Many hemorheologic parameters, such as blood viscosity, hemotocrit, RBC's deformability, fibrinogen, hemoglobin and electrophoresis rate, are also measured, and the morphology of liver is studied. In our hepatocirrhosis models, the abnormity of the hemorheologic index is earlier 2~3 weeks than the form of pseudolobuli in morphology which is the morbidity character of hepatocirrhosis. By using the full–scale hemodynamic parameters measured, new global biomechanical models for both normal and hepatocirrhosic rats are established, which use flow resistance as basic component. This biomechanical model can solve other hemodynamic parameters that couldn't be measured directly, and also can explain the occurrence of PHT reasonably.

In the second part, the **innovations** include:

（1） The abnormity of the hemorheologic index is earlier 2~3 weeks than the form of the morbidity character of hepatocirrhosis, that will have instructive signification to clinic diagnosis and therapy.

（2） The hemodynamic and hemorheologic parameters in normal and hepatocirrhosic stage measured by us are more comprehensive than ever, and basing on the parameters, the global biomechanical models of liver portal vein system are established, which can simulate both normal and hepatocirrhosic state and provide a kind of new method to research PHT.

In the first half year of 2002, Dr. Tan Wenchang helped Professor Yan Zongyi instruct me to research two subjects about fractional calculus. In Appendix II, the problems in the viscous Newtonian fluid and the second grade fluid are expanded to the generalized second grade fluid with fractional derivatives. The generalized second grade fluid model with fractional derivatives is founded to study separately the decay of vortex velocity and diffusion of temperature in a generalized second grade fluid and the Rayleigh-Stokes problem for a heated generalized second grade fluid, the exact solutions for velocity and temperature field of which are also successfully obtained. The exact solutions mentioned above are the main contributions of mine in Appendix II.

Key Words Basic Function Method, Aneurysm, Viscous Incompressible Flow, Inviscid Compressible Flow, Artificial Compressibility Coefficient, Portal Hypertension, Hemodynamics, Hemorheologics, Pathology, Animal Test, Fractional Calculus, Generalized Second Grade Fluid

目　录

第二部分 肝门静脉高压症形成早期的血液动力学、血液流变学及病理学研究

第一部分　三角函数基函数法在不可压缩粘性流体中的应用与研究

第一章 绪 论

§ 1.1 基函数法的研究背景

电子计算机的出现和迅速发展大大改变了科学技术发展的进程。流体力学的发展也因此出现了崭新的面貌，计算流体力学应运而生，新的计算方法层出不穷。而随着近年来计算机处理能力的飞速增长，对复杂流场进行直接的数值模拟也已逐步成为现实。与传统的实验方法相比，数值模拟更经济、迅速，而且数值模拟可以随意选择雷诺数、马赫数等计算参数，因而具有更大的自由度和灵活性，得到的结果也具有更大的信息量[1]。

数值计算的过程总是把一个微分方程，连同其边界条件，设法离散成一个代数方程组，用代数方程组的解来近似原微分方程的解。现有的数值方法主要分为两类：一类是在结构网格上离散微分算子，例如差分方法、谱方法。另一类是在非结构网格上离散积分算子，例如有限元法和有限体积法。它们各有特点，也各有优缺点。

从本世纪初，差分方法一直是计算流体动力学领域中的一种主要手段[2-5]，它简单高效，适应面广，发展完善，有众多优点。但是不可否认，它也有一些不尽人意之处。处理复杂边界需要采用坐标变换或分区处理的办法，比较麻烦，其次，也不易采用网格自适应技术有效地提高计算结果的精度。边界上的格式精度往往比内点的格式精度要低；对于多维问题，要通过算子分裂技术化为若干个一维问题来解决，这样会引起一定的误差。

有限元方法是五十年代 Turner 等人在分析飞机结构时首先使用的方法[6,7]，后来的逐步发展，使得有限元法如同有限差分法那样，成为微分方程数值计算中的一种重要数值计算方法。有限元法由于采用非结构网格，对复杂边界容易处理，而且容易使用网格的自适应来提高精度，易编制比较通用的软件，并有比较成熟的理论[8]。但是有限元法的计算量大，常需解较大的代数方程组，计算时间及内存都较差分法高出很多；不能采用类似有限差分法中的维度分裂及交替方向等技术；逻辑复杂，缺乏统一的构造格式的方法。

为了丰富和发展现有的计算方法，2000 年，吴望一教授[9]发展了一种新型的

数值计算方法——基函数法，并将之应用于计算可压缩无粘流动方面，取得了很好的结果。

§ 1.2 基函数法的基本原理

基函数方法的基本原理是：

在非结构网格中直接离散微分算子，生成网格后，在网格单元上采用基函数展开逼近真实函数，总体基函数可以看作是由单元基函数组合而成的。基函数可取任意正交完备函数族，常用的基函数是多项式和三角函数，也可以取切贝雪夫多项式、勒让德多项式等作为基函数，从而构造出不同的基函数法。为了求节点上的物理量，基函数法采用微分形式的控制方程，选用面积坐标或体积坐标处理二、三维问题。

文[9], [11]在非结构三角元或四面体网格上成功地构造出各阶导数和各阶精度的中心格式和迎风格式。运用基函数法数值求解无粘可压缩流动时，采用通量分裂法及激波前后中心格式和迎风格式相结合的技术，以消除激波附近的非物理波动，由此构造出了数值求解无粘可压缩流动的基函数格式。

§ 1.3 基函数法的发展近况及其特点

在林光的学位论文中[9]首次提出了基函数法的基本理论，并采用多项式作为基函数，数值计算了多个二维无粘超音速和跨音速可压缩流动的典型算例；随后，在谢文俊的学位论文中[11]将多项式基函数法推广到三维无粘可压缩流动，并重点研究了三维非结构网格的生成及自适应技术，数值计算了包括简化航天飞机在内的多种三维算例；李俊修在学位论文中[12]采用三角函数作为基函数，成功地建立了无粘可压缩流动的三角函数基函数格式，计算了多个二维无粘可压缩流动的典型算例。他们都取得了精度和分辨率十分满意的结果。

基函数法成功地保存了有限差分法和有限元法的一些优点。首先，由于基函数法和有限元法一样是在非结构网格上构造的，因此它能方便地处理复杂边界，保持边界点和内点格式精度的一致，并便于采用自适应技术改进计算精度；其次，基函数法和有限差分法一样直接离散微分算子，因而较直接离散积分算子的有限元法显著节省了计算时间及内存。最后，基函数法格式构造统一，规范，便于编制通用程序。

§ 1.4 本文的工作

以往对基函数法的研究均限于高速无粘可压缩流动，本文首次将基函数法应用到二维、三维粘性不可压缩流动的 N-S 方程中。

虽然选用多项式或三角函数为基函数都能得到精度和分辨率很好的结果，但是本文还是采用三角函数为基函数。这是因为三角函数基函数法在处理高阶导数上的独特优势。例如考虑一阶三角函数，由于三角函数可以无限次求导且保持同一精度，因此用它不但可以计算 N-S 方程的一阶对流项，而且可以计算二阶粘性项，其精度均为一阶。而一阶多项式就不具备这方面的优点，用它只能计算 N-S 方程一阶对流项，而计算二阶粘性项时，则因结果为零而失效，此时必须求助于二阶以上的多项式。

由于在不可压缩流动的 N-S 方程中压力和速度并不直接耦合，如何处理速度和压力的关系以使得散度为零的连续方程得以满足便成为我们研究的一个重点。为了使得压力、速度耦合，我们在 N-S 方程中引入了 Chorin[13]的人工压缩性技术，且采用面积坐标和体积坐标处理二、三维问题，成功构造出一阶三角函数基函数和各阶导数的中心格式和迎风格式，继而首次构造出可数值求解不可压缩二维、三维 N-S 方程的三角函数基函数格式，格式中采用了通量分裂法及中心格式和迎风格式相结合的技术。

为了验证此方法的有效性，我们首先数值地计算了有限长度的二维渠道内的流动和有限长度的圆管内流动，采用我们的方法解出的速度分布和压力分布除入口段和出口段外，与库塔流和泊肃叶流的结果十分吻合。在方法得到初步验证后，本文随后计算了定常情形下二维和三维动脉瘤的速度、压力及剪切力分布，以及动脉瘤的几何形状、雷诺数等参数对血液动力学因素的影响。

在计算过程中我们使用的是非结构网格，可以方便地处理复杂形状的三维动脉瘤。这里的二维、三维非结构网格是由 Delaunay 方法和前沿推进法相结合的方法生成的，方法保留了二者的优势——采用前沿推进法布点，然后用 Delaunay 三角化方法对结点进行连接。另外，为了提高网格质量，我们采用 Laplacian 光顺迭代技术。

第二章 基函数法在粘性不可压缩流动中的应用

§ 2.1 引言

粘性不可压缩流 N-S 方程的数值模拟有着广泛的需求，例如空气动力学中的低速流，喷气推进的内流，生物流动分析如血管流等。当低速飞机作机动飞行时，还需要有时间项的不可压缩 N-S 方程。

已经有不少求解不可压缩 N-S 方程的方法。由于在不可压缩中压力和速度并不直接耦合，每一方法都集中在如何处理速度和压力的关系，使散度为零的连续方程得以满足。目前的方法大致分为两类：一类是分离式求解速度和压力；另一类是速度和压力同步求解。

所谓分离算法是先假定压力场或速度场，由散度方程来修正速度场或压力场，每一物理时间步，要反复求解动量方程和 Poisson 方程，这是比较耗费计算时间的。

而同步推进法则是在时间推进时，压力和速度一起解出，随着时间推进逐步满足散度条件，这一方法源于 60 年代 Chorin[13]提出的人工压缩性方法。人工压缩性方法是指一个虚拟的压力对时间的导数被加到连续性方程中，这样可以不仅可以使压力和速度直接在同一时间耦合，而且可应用可压缩流中的某些高精度的迎风差分格式。最初应用人工压缩性方法限于定常问题[14,15]，目前已被推广到非定常流动[16-18]。

本章所采用的方法是同步推进法，为了使得压力、速度耦合，我们在 N-S 方程中引入了人工压缩性项，构造出可数值求解不可压缩二维、三维 N-S 方程的三角函数类型的基函数格式，同时采用了通量分裂法及中心格式和迎风格式相结合的技术。

本章的主要内容包括：三维非结构网格的生成、三角函数基函数法的构造、流通量分裂法及基函数格式的表达，以及数值结果分析等。

§ 2.2 非结构网格的生成

近年来，随着计算流体力学的发展以及大容量计算机的出现，要求解决的问题也越来越复杂，使得用结构网格来离散三维空间的工作量变得非常之大。因而人们把目光集中在另一种网格——非结构网格上。

非结构网格的生成方法有许多，如 Delaunay 方法、前沿推进法、规则划分法[28]、凸域划分法[29]、修正四叉树八叉树法[30,31]等。目前最常用的生成方法有两种：一是 Delaunay 三角化方法[32,33]，它是把空间预先分布的点按 Dirichlet 棋

盘化原则连成四面体。其优点是生成效率高，生成过程稳定，生成的网格质量也比较好。另一种是前沿推进法[34-40]，它是先生成表面网格，然后以此为初始的前沿向区域内部推进，按背景网格提供的信息自动生成空间点，当前沿内的面为零时，生成也就完成了。与 Delaunay 方法相比，它可以自己生成结点而不需要引入，而且在网格尺度的分布控制上有其方便和优越之处。但是网格生成过程不稳定，生成效率也很低，尤其是查找要花费大量的时间。

从以上的分析可以看出，前沿推进法提供了一种很好的布点方式，而 Delaunay 方法则是一种很好的连接方法。基于这一特点，完全可以采用前沿推进的方式布点，而用 Delaunay 三角化方法对结点进行连接，在国外有人在二维情形下做过类似的工作[41]，而谢文俊则首次将此方法推广到三维[11]。

本文在生成三维非结构网格时便采用了谢文俊提出的前沿推进法与 Delaunay 方法结合的办法，具体步骤如下：

（1）将边界上给定的结点用 Delaunay 方法连接生成原始网格；

（2）对原始网格进行整理，保证边界面的完整性，消除边界外的单元；

（3）整理后的网格，边界面为初始前沿；

（4）从前沿向区域内部推进布点，此时采取层推进方式，一次产生多个结点；

（5）对上述结点进行判断，剔除不合理的点，并将剩下的点引入 Delaunay 结构中，生成新的网格，前沿中原有的三角形面在推进后被包含它们的新单元的新生成的面代替；

（6）重复（4）、（5）直到前沿中不再包含任何面为止，则网格生成完毕。

下面本文将对以上各点进行详述。

§ 2.2.1　Delaunay 三角化的基本原理及性质

Delaunay 三角化方法是对给定点集的一种最优化的连接方式，其理论依据是 Dirichlet 棋盘化原则：对于平面上给定的一组点 $\{P_i\}$，可以将平面划分为一系列区域，使得每个区域都包含点集 $\{P_i\}$ 中的一个点，且该区域中的任一点与它所包含的这点的距离比与 $\{P_i\}$ 中其它点的距离近。这些区域都是凸多边形的，即所谓 Voronoi 多边形（图 2-1）。容易看出，Voronoi 多边形的每一条边都是以它为公共边的两个区域所对应的点的中垂线，这样的两个点称为一个点对，将所有这样的点对相连，则整个平面就被三角化了。这就是 Delaunay 三角化的基本原理。

由上面的原理可以推出，用 Delaunay 三角化法连成的单元有一个重要的性质：每一个三角形单元的外接圆中都不包含其它的点，在三维情形下则是每个四面体单元的外接球中都不包含其它点。这是 Delaunay 方法的算法基础。关于

Delaunay 三角化网格生成过程有多种算法，目前大家公认比较好的方法是 Bowyer 算法[32]。

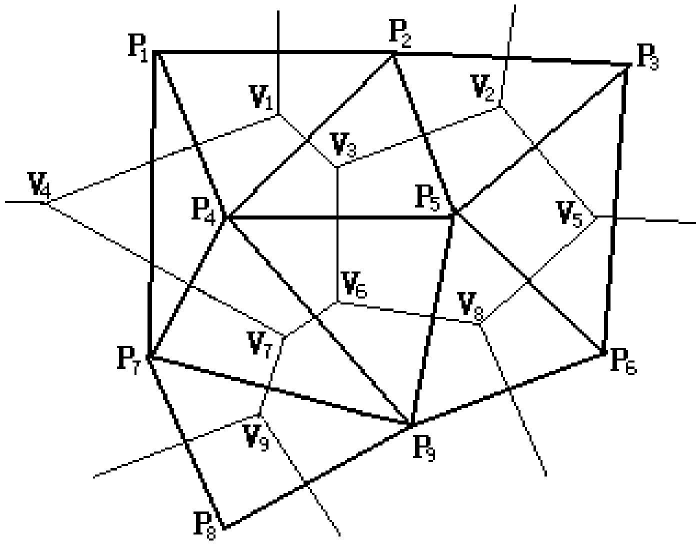


图 2-1 Voronoi 多边形及 Delaunay 三角化单元

§ 2.2.2 由边界点生成原始网格

离散化的三维区域边界应是由一个个的三角形面组成的闭合曲面，边界点包括物面点和远场点。

按照 Bowyer 算法，在将边界点用 Delaunay 方法连接起来之前，必须首先给定一个凸外壳包住整个计算区域，并用人工方式将该外壳分为几个四面体，作为最初网格。

对最初的凸外壳，我们选用长方体，并将之分为六个四面体单元。为与正式结点的编号区别，我们对该凸壳的顶点编号采用负数（图 2-2）。

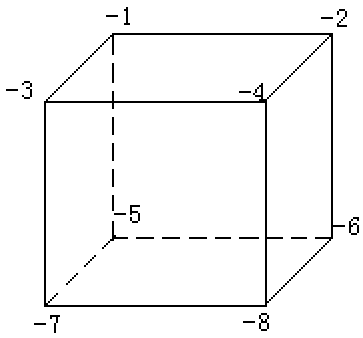


图 2-2 凸壳结点编号

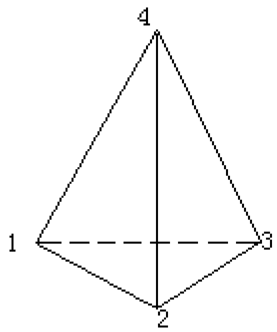


图 2-3 四面体单元的结点局部编号

按照 Bowyer 算法，每插入一个点都要找出其外接球包含插入点的四面体。因此对各单元的存储通过如下的数据结构来进行：

{外心坐标,外接球半径，组成单元的四个结点，单元的四个相邻单元编号}

对组成每个单元的四个结点，我们按照图 2-3 的顺序进行局部编号，按此顺序当采用公式$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}$计算四面体体积时，得到的 V 值是正数，否则得到的就是负体积值。这样，在引入边界点以前，最初的网格单元有六个(相邻单元编号为 0 表示该方向无单元与其相邻)：

表 2-1 最初网格单元的数据结构

单元编号	外心及外接球半径	组成的点	相邻的单元
1	(x,y,z), r	-1,-2,-3,-5	3,0,0,0
2	(x,y,z), r	-7,-6,-5,-2	0,3,6,0
3	(x,y,z), r	-2,-3,-5,-7	0,2,5,1
4	(x,y,z), r	-6,-7,-8,-4	0,0,6,0
5	(x,y,z), r	-4,-3,-2,-7	3,6,0,0
6	(x,y,z), r	-4,-6,-7,-2	2,5,0,4

人工给定最初网格后，下面的步骤就是插入边界结点生成原始网格。按照 Bowyer 算法，将点插入网格中的过程如下：

1. 按随机找一个四面体单元，看它的外接球是否包含待插点，如果不包含，继续搜寻，直到找到一个外接球包含该点的单元为止；
2. 以找到的四面体为基点，搜寻其相邻的单元，判断它们的外接球是否也包含待插点，如果不包含，则停止这个方向的搜索，转向另一个方向；如果包含，则以此四面体为基点开始下一轮的搜寻，直到各方向都搜寻完为止；
3. 搜寻到的这些四面体单元都将被打破，而留下一个由一系列三角形面组成的空腔，即所谓 Delaunay 空腔；
4. 把 Delaunay 空腔的每一个面都与待插点连接起来，生成新的四面体单元；
5. 对新单元进行整理，加入到上述数据结构中，则该点插入完毕。

重复以上步骤，将所有边界点都加入网格中后，接下来就要对该网格进行整理。整理的过程包括保证物面的完整性以及消除边界外的四面体。整理的步骤是：

1. 判断每一个边界面的三个点是否包含于网格的某一个单元中，如是则该表面单元存在，否则就不存在；

2. 对不存在的边界单元在其中心处插入一个点加入网格中，同时该单元也进行分裂；
3. 重复上述步骤，直到所有的边界面都存在；
4. 经过上述处理，每个边界面都应为两个单元所包含，很容易区分出这两个单元谁在边界外，谁在区域内，我们将前者用 0 标记，将后者用 1 标记。将所有这些单元都标记完毕后，通过这些单元向四周搜寻，凡是与标记为 0 的单元相邻且不包含边界面的单元，都用 0 标记，而凡是与标记为 1 的单元相邻且不包含边界面的单元，都用 1 标记，直到所有单元标记完毕，这样，我们就将所有单元以边界面为界限，分为了两大类；
5. 所有标记为 0 的单元都是在区域外的，将它们都从网格中删除，并重新整理网格结构；
6. 将第 2 步在物面上新插入的点剔除，将包含该点的单元重连，恢复物面。

这样，就得到了由边界点组成的原始网格，且所有单元都在计算区域内部。在下面的过程中，当引入内部结点时，如果某个包含边界面的单元要被删除，则该边界面会自动作为 Delaunay 空腔的一个面，参与组成新的四面体单元，因而边界的完整性不会被破坏了。

§ 2.2.3 内部结点的生成及三角化

2.2.3.1 三维背景网格

由于本文对内部结点的生成，采用的是前沿推进法的方式，因而必须有背景网格来提供空间的尺度分布信息。背景网格应覆盖整个计算区域。当生成初网格时，我们可以选取一些有代表性的点，并定好各点上的尺度参数，然后将它们用 Delaunay 方法连接起来作为背景网格。当生成自适应网格时，则可以用初网格作为背景网格。

当背景网格生成好以后，对域内任一点的控制参数的获得是通过线性插值而得到的，具体的作法是：1) 找出包含该点的背景网格单元，其标识是该点与所找到的四面体的四个面所构成的体积值均为正或这四个四面体的体积的绝对值之和不大于该背景网格四面体单元的体积；2) 对该点进行线性插值得到所需的尺度参数, 插值公式是

$$\delta_P = \left(\delta_D \times V_{ABCP} + \delta_C \times V_{ADBP} + \delta_B \times V_{ACDP} + \delta_A \times V_{BDCP}\right) / V_{ABCD} \qquad (2.2.1)$$

其中，δ_P 为插值点 P 的尺度参数，δ_A、δ_B、δ_C、δ_D 为背景网格单元的四个顶点 A、B、C、D 上的尺度参数，V_{ABCD} 为该背景网格单元体积，V_{ABCP}、V_{ADBP}、V_{ACDP}、V_{BDCP} 为 P 与该背景网格单元的四个面所构成的四面体体积。

2.2.3.2 推进生成内部结点

前沿中的每个面都可用于推进生成新结点、新单元，我们称之为“活跃的面”。

从前沿中选择一个三角形面作为推进的基面，设为面 ABC（如图 2-4 所示），（在前沿推进法中，通常要选择最小的面，这样是为了使得前沿提前相遇的可能性降到最小，以避免生成过多的畸形单元）。

设点 O 是面 ABC 的外接圆圆心，r 是其外接圆半径，$\overrightarrow{ON}$ 是该面的指向前沿所包围的区域内部的单位法向向量，用背景网格插值，可以得到点 O 上的尺度参数 $\delta(O)$，从 O 点作有向线段 $\overrightarrow{OP}$，使其长度 h 满足：

$$h=\begin{cases} r, & \text{当}0<\delta(O)<r \\ \delta(O), & \text{当}r<\delta(O)<3r \\ 3r, & \text{当}3r<\delta(O) \end{cases}$$

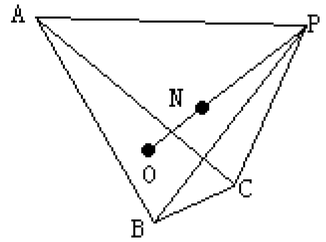


图 2-4

之所以对 h 作出这样的限制，是为了避免单元过于畸形。

按照传统的前沿推进法，由面 ABC 推进生成新结点 P 的同时，点 P 将直接与面 ABC 的三个顶点连接而形成一个新的四面体单元 $PABC$，当然，对于这个新结点和新单元，还要进行可行性判断，如果新单元和前沿相交或者该单元中包含前沿点，又或点 P 与前沿点距离太近，那么点 P 就不能参与构成新单元，而应用相应的前沿点来代替它构成新单元。对于三维问题而言，这些工作的计算量非常大。而且，由于前沿包围的空间是一个尚未被离散化的空腔，这也给判断前沿是否相遇，以及判断网格是否生成完毕增加了困难。

本文由于只是采用前沿推进的方式来生成结点，不是采用传统的前沿推进法连接结点的方式来生成新单元，而是随后将新结点用 Delaunay 方法连入网格中，因此处理方式比之原始的前沿推进法更加灵活。在由前沿向前推进时，不必选取前沿中最小的面作为起始面来推进，而是可以同时从前沿中的每一个面向前推进生成新的结点，一次推进一层，既提高了效率，又避免了对前沿中的面按大小进行排序。当然，为了保证网格的质量，对新生成的结点还要进行一些处理：如图 2-4，从面 ABC 推进生成点 P 后，通过背景网格插值，可求得该点上的尺度 δ_P，以 P 为圆心，$0.5\delta_P$ 为半径作球，查找是否有结点位于该球内，若有，则不要点 P，若无，则再对四面体 $PABC$ 进行判断，查找是否有结点位于其外接球内，如果有，则也不要点 P，否则点 P 将作为新的结点引入到外接球中。如果点 P 在边界附近，还要判断它是否与某个边界相距过小，如果小于 $0.5\delta_P$，则 P 也不能加入网格。由于前面在由边界结点生成初始网格时，采用 Delaunay 方式进行连接，因而整个计算区域的空间都被四面体充满了，这样，再按照本文前面的数据结构，进行这些查找和判断的工作量并不大。

2.2.3.3 内部结点的三角化及前沿的更替

当从前沿推进一次，生成一批新的结点后，就要将它们用 Delaunay 方式加入到三角化网格结构中，形成新的结构。内部结点的插入过程与前面所讲边界点插入网格中的过程一样，这里就不再论述了。

当新的结构形成后，前沿也要进行更替了。由于我们在推进时，一次向前推进一层，前沿中的每个活跃的面都参与了本次的推进，因此这些面都应作为不活跃的面从前沿中去掉，这些不活跃的面以后不能再次纳入前沿中。新的前沿将由包含不活跃的面的新单元的新生成的面来组成。

前沿不断更替，不断的生成新的结点插入网格中，直到前沿中不再有活跃的面为止，则推进完毕。

2.2.3.4 网格的光滑处理

按照上面这种层推进，对于网格尺度变化剧烈的区域，难免会有一些因尺度过渡不够光滑而导致的畸形单元，对于这些地方还要做一些特殊处理。本文对于这些地方的畸形单元，采取在其外心处加入新的结点插入网格中的方法来使得网格的尺度过渡光滑化。

§2.2.4 二维三角形非结构网格的生成

对于二维情况下的三角形非结构网格，可以类似三维生成。同样用前沿推进法布点，然后用 Delaunay 三角化方法对结点进行连接。

在生成非结构网格时，首先将边界点用 Delaunay 方法连接生成原始网格，然后将边界作为最初的前沿，按照背景网格的信息从前沿向内部推进产生新的结点，新的结点再用 Delaunay 方式引入网格中，再将前沿中原有边用包含它们的新单元的新生成的边代替，继续推进产生新的结点，生成新的网格结构。由于对新生成的结点不是采用传统的前沿推进法的直接连接方式连入网格中，而是用 Delaunay 方法连入网格结构中，因而在推进时，可以一次推进一层产生一组新的结点。这样不仅能按给定尺度分布生成元素过渡光滑的网格，而且网格的生成过程稳定，生成效率高，生成速度快。为了提高网格质量，同样采用 Laplacian 光顺迭代技术。

§2.3 三角函数基函数的构造

如前所述，本文只限于采用三角函数这一正交完备函数族作为基函数，并重点研究一阶精度的三角函数型基函数格式，这是因为和高阶精度相比，一阶精度基函数格式的公式最简单，涉及的单元节点个数最少，因此所需的计算时间和内

存也最少。至于结果精度和分辨率则完全可以通过自适应技术和加密网格的方法加以解决。在计算机的内存及运算速度飞速提高的今天，这是很容易做到的。基于这样的认识，我们认为最值得推荐和研究的是一阶精度的基函数格式。

下面我们先来考虑较为复杂的三维问题的四面体单元。

§ 2.3.1 真实函数的逼近

对三维问题，我们将计算区域剖分为四面体单元，在每个单元中，采用基函数 $\phi_i^{(n)}(x,y,z)$ 展开逼近真实函数 $f(x, y, z)$

$$f^{(n)}(x,y,z)=\sum_{i=1}^{m} f(x_i,y_i,z_i)\phi_i^{(n)}(x,y,z) \tag{2.3.1}$$

式中 $f^{(n)}(x,y,z)$ 是真实函数的 n 阶近似。特别地，$f^{(n)}(x,y,z)$ 在各节点上精确等于真实函数值 $f(x,y,z)$。

基函数 $\phi_i^{(n)}(x,y,z)$ 可以取任意正交完备函数族，最常用的基函数是多项式[9-11]和三角函数[12]，也可以用切贝谢夫多项式，勒让德多项式等作为基函数。当 n 取不同正整数时，可得不同阶次的逼近函数，m 是单元中的点数，对于三维问题的四面体单元，m=4。

§ 2.3.2 非结构网格上导数的中心格式和迎风格式

下面我们来构造非结构网格节点上函数的导数值，只限于研究基函数是三角函数的情形，在三维问题中，为研究方便，我们使用无量纲体积坐标。

2.3.2.1 体积坐标的引入

如图 2-5 所示四面体单元，对于其中任一点 P，定义其体积坐标

$$L_i=V_i/V \qquad (i=1,2,3,4)$$

其中 V_i 为点 P 与除顶点 i 外的另外三个顶点所构成的四面体体积，V 为整个单元的体积。

显然，四个体积坐标 L_1,L_2,L_3,L_4 之间有

$$L_1+L_2+L_3+L_4=1$$

即四个体积坐标中，只有三个是独立的。

体积坐标 L_i 与直角坐标之间的关系为

$$L_i=a_i+b_ix+c_iy+d_iz \tag{2.3.2}$$

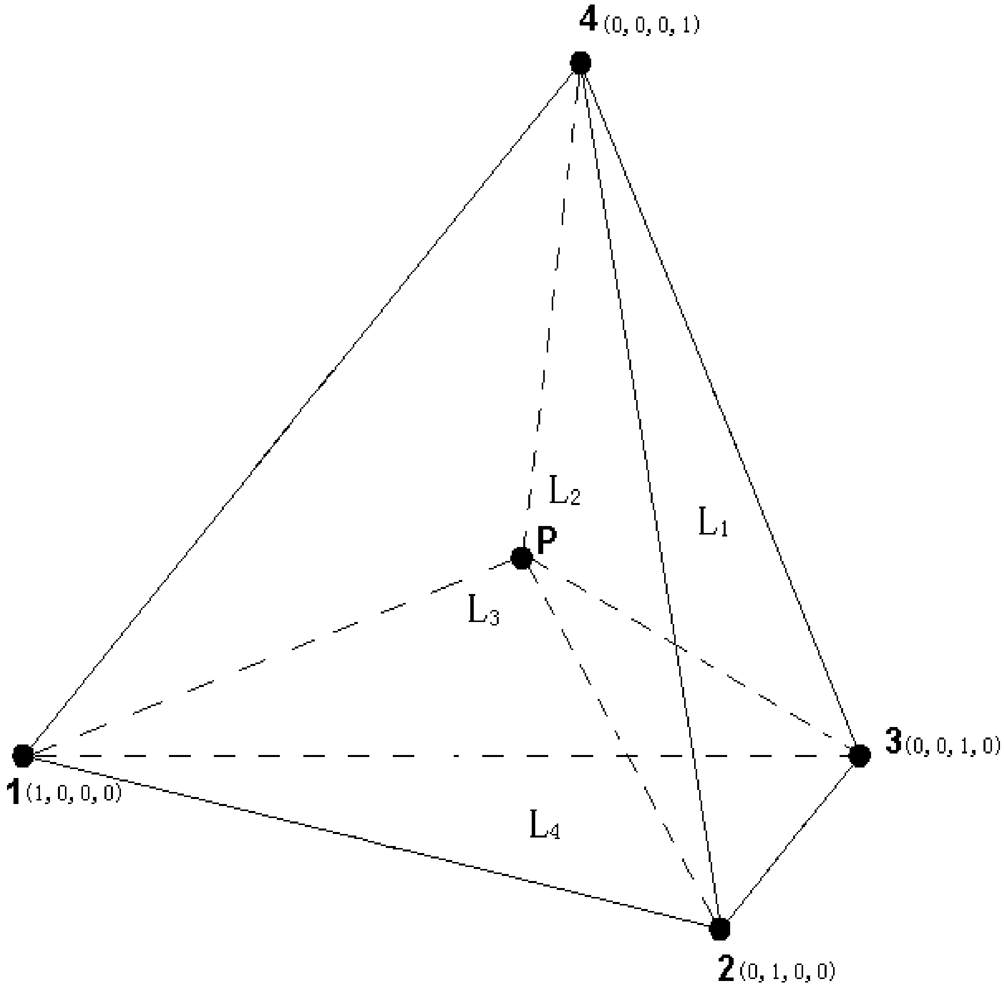


图 2-5　四面体单元体积坐标示意图

其中

$$a_i=\frac{1}{6V}\begin{vmatrix}x_j & y_j & z_j\\ x_k & y_k & z_k\\ x_l & y_l & z_l\end{vmatrix},\quad b_i=-\frac{1}{6V}\begin{vmatrix}1 & y_j & z_j\\ 1 & y_k & z_k\\ 1 & y_l & z_l\end{vmatrix}$$

$$c_i=\frac{1}{6V}\begin{vmatrix}1 & x_j & z_j\\ 1 & x_k & z_k\\ 1 & x_l & z_l\end{vmatrix},\quad d_i=-\frac{1}{6V}\begin{vmatrix}1 & x_j & y_j\\ 1 & x_k & y_k\\ 1 & x_l & y_l\end{vmatrix} \tag{2.3.3}$$

式中
$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l\end{vmatrix} \tag{2.3.4}$$

有了这些准备，下面我们来着手进行基函数的构造。

2.3.2.2 一阶基函数及其导数的构造

一阶情况下，(2.3.1)式可写为：

$$f^{(1)}(x,y,z)=\sum_{i=1}^{4} f(x_i,y_i,z_i)\phi_i^{(1)}(x,y,z) \tag{2.3.5}$$

$\phi_i^{(1)}(x,y,z)$ 是一阶三角函数类型的基函数，它在体积坐标下的表达式可类似二维给出[12]：

$$\phi_i^{(1)}(x,y,z)=\frac{1}{2}[1+\sin(\frac{\pi}{2}L_i)-\cos(\frac{\pi}{2}L_i)] \qquad (i=1,2,3,4) \tag{2.3.6}$$

(2.3.5)式的一阶导数为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x}&=\sum_{i=1}^{4} f(x_i,y_i,z_i)\frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial x}\\ \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y}&=\sum_{i=1}^{4} f(x_i,y_i,z_i)\frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial y}\\ \frac{\partial f^{(1)}}{\partial z}&=\sum_{i=1}^{4} f(x_i,y_i,z_i)\frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial z}\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

其中：
$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial x}&=\frac{\pi}{4}[\cos(\frac{\pi}{2}L_i)+\sin(\frac{\pi}{2}L_i)]\frac{\partial L_i}{\partial x}\\ \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial y}&=\frac{\pi}{4}[\cos(\frac{\pi}{2}L_i)+\sin(\frac{\pi}{2}L_i)]\frac{\partial L_i}{\partial y}\\ \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial z}&=\frac{\pi}{4}[\cos(\frac{\pi}{2}L_i)+\sin(\frac{\pi}{2}L_i)]\frac{\partial L_i}{\partial z}\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

根据方程(2.3.2), 我们有： $\frac{\partial L_i}{\partial x}=b_i$， $\frac{\partial L_i}{\partial y}=c_i$， $\frac{\partial L_i}{\partial z}=d_i$， 故有：

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x}&=\frac{\pi}{4}\sum_{i=1}^{4} f(x_i,y_i,z_i)[\cos(\frac{\pi}{2}L_i)+\sin(\frac{\pi}{2}L_i)]b_i\\ \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y}&=\frac{\pi}{4}\sum_{i=1}^{4} f(x_i,y_i,z_i)[\cos(\frac{\pi}{2}L_i)+\sin(\frac{\pi}{2}L_i)]c_i\\ \frac{\partial f^{(1)}}{\partial z}&=\frac{\pi}{4}\sum_{i=1}^{4} f(x_i,y_i,z_i)[\cos(\frac{\pi}{2}L_i)+\sin(\frac{\pi}{2}L_i)]d_i\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

同理，我们可以构造出(2.3.5)式的二阶导数为：

$$\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x})=\frac{\pi^2}{8}\sum_{i=1}^{4}f(x_i,y_i,z_i)[\cos(\frac{\pi}{2}L_i)-\sin(\frac{\pi}{2}L_i)]b_i^{\ 2}$$
$$\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial y})=\frac{\pi^2}{8}\sum_{i=1}^{4}f(x_i,y_i,z_i)[\cos(\frac{\pi}{2}L_i)-\sin(\frac{\pi}{2}L_i)]c_i^{\ 2} \qquad (2.3.10)$$
$$\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial z})=\frac{\pi^2}{8}\sum_{i=1}^{4}f(x_i,y_i,z_i)[\cos(\frac{\pi}{2}L_i)-\sin(\frac{\pi}{2}L_i)]d_i^{\ 2}$$

注意以上求导均在一个四面体单元中进行。

2.3.2.3 一阶中心格式的构造（1C）

设点 n 周围有 N 个单元，则在该点有 N 个不同的导数值 $\left[\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\right]_n^{e_i}$ $(i=1,2,\cdots,N)$ （m 为正整数，本文中取 1 和 2）。e_i 表示点 n 周围第 i 个单元。下标 n 表示点 n 上的值。我们采用加权平均法求 n 点上的函数值 $\left[\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\right]_n^{e_i}$。由于面积越小，$\left[\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\right]_n^{e_i}$ 的值越接近精确值，故权因子取 $1/A_{e_i}$ 是合适的。

于是导数的中心格式是

$$\left[\frac{\partial^m f}{\partial x_j^{\ m}}\right]_n^C=\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{A_{e_i}}}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{A_{e_i}}\left[\frac{\partial^m f}{\partial x_j^{\ m}}\right]_n^{e_i} \qquad (2.3.11)$$

2.3.2.4 一阶迎风格式构造（1U+和 1U-）

在差分方法中，用迎风格式计算导数时，节点上的新值仅与其逆风方向的节点值有关。在基函数法中，由于节点上的值总是与周围的所有节点值相关，因此如何构造非结构网格上的迎风格式需要特殊研究。

为了在非结构网格上构造导数的迎风格式，我们提出三角元迎风面积的概念。从物理上容易理解只有迎风面积这部分才对该点迎风导数值起作用。

以图 2-6 所示的二维区域为例，假设点周围有 4 个单元 $e_i(i=1,\cdots,4)$。若 x 轴正向为迎风方向。通过该点作 x 轴的垂线，将周围每个单元分成迎风面积（阴影部分）和背风面积两部分。

我们引入迎风系数 $\alpha_n^{e_i}$。如图 2-6 所示，对点 1，单元 e_i 对它的迎风系数 $\alpha_1^{e_i}$ 应为 e_i 在阴影区域中的面积 $A_{e_i x}$ 与 e_i 的总面积 A_{e_i} 的比值，即 $\alpha_1^{e_i}=A_{e_i x}/A_{e_i}$，如 $\alpha_1^{e_2}$ 和

$\alpha_1^{e_4}$ 分别为 0 和 1。在三维网格中，迎风系数应为体积比。我们在计算迎风导数仅采用阴影区域来计算。这样，一阶导数的迎风格式为：

$$\left[\frac{\partial^m f}{\partial x_j{}^m}\right]_n^{U+} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_n^{e_i}}{A_{e_i}}}\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_n^{e_i}}{A_{e_i}}\left[\frac{\partial^m f}{\partial x_j{}^m}\right]_n^{e_i} \tag{2.3.12a}$$

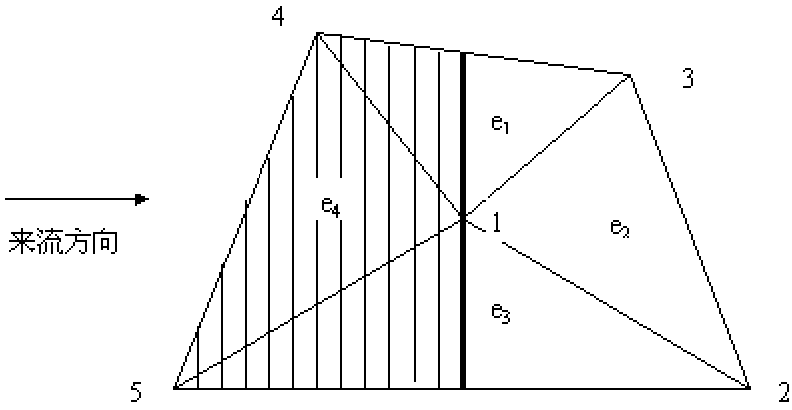


图 2-6 非结构网格迎风区域

如果我们取背风面积来计算，便得到了一阶导数的负迎风格式：

$$\left[\frac{\partial^m f}{\partial x_j{}^m}\right]_n^{U-} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1-\alpha_n^{e_i}}{A_{e_i}}}\sum_{i=1}^{N}\frac{1-\alpha_n^{e_i}}{A_{e_i}}\left[\frac{\partial^m f}{\partial x_j{}^m}\right]_n^{e_i} \tag{2.3.12b}$$

同时，上述两种格式还可以作为一种单侧导数的算法。

容易看出，$\alpha_1^{e_i}$ 取为 1 时，迎风格式(2.3.12a)转变为中心格式(2.3.11)，而 $\alpha_1^{e_i}$ 取为 0 时，负迎风格式(2.3.12b)则转变为中心格式。

2.3.2.5 三维非结构网格上导数的中心格式和迎风格式

按照上面的模式，我们可以构造出三维非结构网格上的各阶导数的一阶中心格式和迎风格式。

一阶中心格式

$$\left[\frac{\partial^m f}{\partial x_j{}^m}\right]_n^{1C} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{A_{e_i}}}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{A_{e_i}}\left[\frac{\partial^m f^{(1)}}{\partial x_j{}^m}\right]_n^{e_i} \quad \begin{pmatrix} j=1,2,3 \\ x_1=x, x_1=y, x_3=z \end{pmatrix} \tag{2.3.13}$$

（m 为正整数，本文取 1 或 2，下同）。

一阶迎风格式

$$\left[\frac{\partial^m f}{\partial {x_j}^m}\right]_n^{1U+} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_n^{e_i}}{A_{e_i}}}\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_n^{e_i}}{A_{e_i}}\left[\frac{\partial^m f^{(1)}}{\partial {x_j}^m}\right]_n^{e_i} \qquad \begin{pmatrix} j=1,2,3 \\ x_1 = x, x_1 = y, x_3 = z \end{pmatrix} \tag{2.3.14a}$$

一阶负迎风格式

$$\left[\frac{\partial^m f}{\partial {x_j}^m}\right]_n^{1U-} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1-\alpha_n^{e_i}}{A_{e_i}}}\sum_{i=1}^{N}\frac{1-\alpha_n^{e_i}}{A_{e_i}}\left[\frac{\partial^m f^{(1)}}{\partial {x_j}^m}\right]_n^{e_i} \qquad \begin{pmatrix} j=1,2,3 \\ x_1 = x, x_1 = y, x_3 = z \end{pmatrix} \tag{2.3.14b}$$

§ 2.3.3 二维三角函数基函数的构造

对二维问题，我们将计算区域剖分为三角形单元，在每个单元中，采用基函数 $\phi_i^{(n)}(x,y)$ 展开逼近真实函数 $f(x,y)$：

$$f^{(n)}(x,y) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i, y_i)\phi_i^{(n)}(x,y) \tag{2.3.15}$$

式中 $f^{(n)}(x,y)$ 是真实函数的 n 阶近似。特别地，$f^{(n)}(x,y)$ 在各节点上精确等于真实函数值 $f(x,y)$。当 n 取不同正整数时，可得不同阶次的逼近函数，m 是单元中的点数，对于二维问题，m=3。

在二维问题中，我们采用面积坐标。在图 2-7 中所示的三角形单元中，可以定义三角形中任意一点 P 的面积坐标为：

$$\xi_i = A_i / A \qquad (i = 1,2,3)$$

ξ_i 称为面积坐标。式中 A 是三角形单元的面积，A_1，A_2，A_3 分别是 P 点和三角形三个顶点连线将三角形划分成的三个小三角形的面积。由于 $A_1+A_2+A_3=A$，因此三个面积坐标 ξ_1，ξ_2，ξ_3 有下列关系：

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$$

由此可见，在三个面积坐标中，只有两个是独立的。

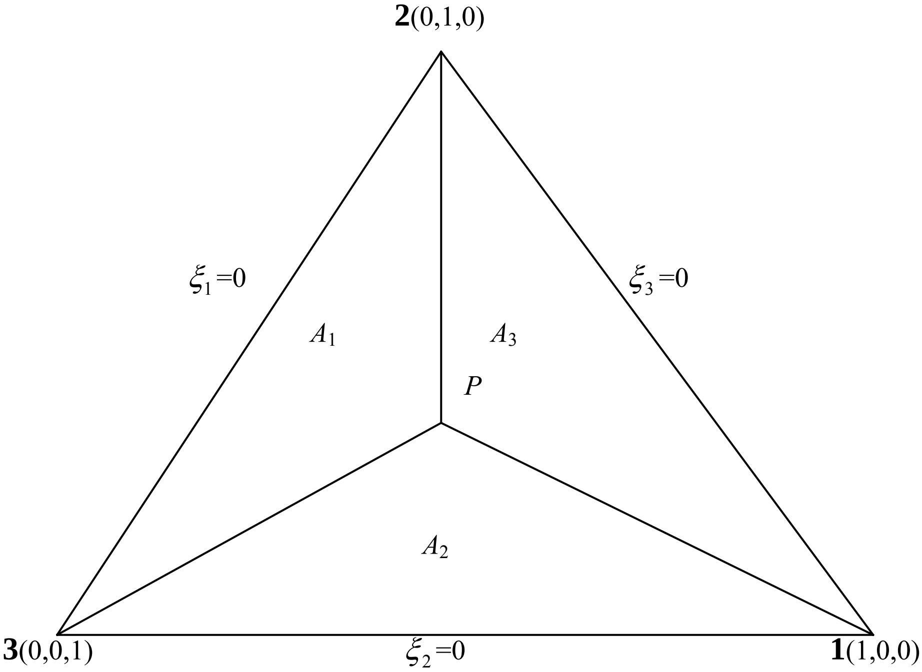


图 2-7 三角形单元的面积坐标示意图

面积坐标ξ_i与直角坐标之间的关系为

$$\xi_i = a_i + b_i x + c_i y \tag{2.3.16}$$

其中

$$a_i = \frac{1}{D}(x_j y_k - x_k y_j), \qquad b_i = \frac{1}{D}(y_j - y_k), \qquad c_j = \frac{1}{D}(x_k - x_j) \tag{2.3.17}$$

式中

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2A \tag{2.3.18}$$

有了这些准备，下面我们来着手进行一阶三角函数基函数的构造。

一阶情况下，(2.3.15)式可写为：

$$f^{(1)}(x,y) = \sum_{i=1}^{3} f(x_i, y_i)\phi_i^{(1)}(x,y) \tag{2.3.19}$$

$\phi_i^{(1)}(x,y)$是一阶三角函数类型的基函数，它在面积坐标下的表达式为[12]：

$$\phi_i^{(1)}(x,y) = \frac{1}{2}[1 + \sin(\frac{\pi}{2}\xi_i) - \cos(\frac{\pi}{2}\xi_i)] \qquad (i=1,2,3) \tag{2.3.20}$$

可推导出(2.3.19)式的一阶导数和二阶导数为：

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} = \frac{\pi}{4}\sum_{i=1}^{3} f(x_i, y_i)[\cos(\frac{\pi}{2}\xi_i) + \sin(\frac{\pi}{2}\xi_i)]b_i$$

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial y}=\frac{\pi}{4}\sum_{i=1}^{3}f(x_i,y_i)[\cos(\frac{\pi}{2}\xi_i)+\sin(\frac{\pi}{2}\xi_i)]c_i \tag{2.3.21}$$

$$\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial x^2}=\frac{\pi^2}{8}\sum_{i=1}^{3}f(x_i,y_i)[\cos(\frac{\pi}{2}\xi_i)-\sin(\frac{\pi}{2}\xi_i)]b_i^{\ 2}$$

$$\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial y^2}=\frac{\pi^2}{8}\sum_{i=1}^{3}f(x_i,y_i)[\cos(\frac{\pi}{2}\xi_i)-\sin(\frac{\pi}{2}\xi_i)]c_i^{\ 2} \tag{2.3.22}$$

注意以上求导均在一个三角形单元中进行。

我们便可以同理构造出二维非结构网格上的各阶导数的一阶中心格式和迎风格式。

一阶中心格式

$$\left[\frac{\partial^m f}{\partial x_j^{\ m}}\right]_n^{1C}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{A_{e_i}}}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{A_{e_i}}\left[\frac{\partial^m f^{(1)}}{\partial x_j^{\ m}}\right]_n^{e_i}\qquad\begin{pmatrix} j=1,2\\ x_1=x,x_1=y\end{pmatrix} \tag{2.3.23}$$

（m 为正整数，本文取 1 或 2，下同）。

一阶迎风格式

$$\left[\frac{\partial^m f}{\partial x_j^{\ m}}\right]_n^{1U+}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_n^{e_i}}{A_{e_i}}}\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_n^{e_i}}{A_{e_i}}\left[\frac{\partial^m f^{(1)}}{\partial x_j^{\ m}}\right]_n^{e_i}\qquad\begin{pmatrix} j=1,2\\ x_1=x,x_1=y\end{pmatrix} \tag{2.3.24a}$$

一阶负迎风格式

$$\left[\frac{\partial^m f}{\partial x_j^{\ m}}\right]_n^{1U-}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1-\alpha_n^{e_i}}{A_{e_i}}}\sum_{i=1}^{N}\frac{1-\alpha_n^{e_i}}{A_{e_i}}\left[\frac{\partial^m f^{(1)}}{\partial x_j^{\ m}}\right]_n^{e_i}\qquad\begin{pmatrix} j=1,2\\ x_1=x,x_1=y\end{pmatrix} \tag{2.3.24b}$$

§ 2.4 三维不可压缩流体 N-S 方程基函数格式的构建

§ 2.4.1 控制方程

三维粘性不可压缩流体的 N-S 方程组：

$$\begin{gathered}\nabla\bullet\vec{v}=0\\ \rho(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\bullet\nabla\vec{v})=\rho\vec{F}-\nabla p+\mu\nabla^2\vec{v}\end{gathered} \tag{2.4.1}$$

其中 ρ，μ 分别为流体的密度和粘性系数，$\vec{v}$ 是三维速度向量，p 为压力，$\vec{F}$ 为体力向量，在本文中忽略。

对方程(2.4.1)用无穷远处物理量 ρ_∞, U_∞ 及物理的特征长度 L 无量纲化：

$$
\begin{aligned}
& x^* = x/L,\ y^* = y/L, z^* = z/L, t^* = tU_\infty/L, \\
& \rho^* = \rho/\rho_\infty,\ p^* = p/(\rho_\infty U_\infty^2), \\
& u^* = u/U_\infty,\ v^* = v/U_\infty,\ w^* = w/U_\infty
\end{aligned}
\tag{2.4.2}
$$

可压缩与不可压缩流动之间有一个基本的差别，即连续性方程中不含压力，因此，在方程中压力和速度并不直接耦合。为了解决此问题，这里我们采用人工压缩性方法，该方法将虚拟时间导数加到连续性方程中，这样方程组变成双曲型，就可以在时间推进的过程对压力和速度同步求解。

采用人工压缩性方法，且无量纲化，方程(2.4.1)可写为（为书写简便，将无量纲变量的“*”都去掉）：

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\beta}\frac{\partial p}{\partial \tau} + \nabla \bullet \vec{v} = 0 \\
& \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \bullet \nabla \vec{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \vec{v}
\end{aligned}
\tag{2.4.3}
$$

式中 τ 是虚拟时间，t 是真实时间，β 为人工压缩性系数，根据以往的经验，不同的流动状态 β 取不同的值。关于 β 的取值，在文献[16]中有比较详尽的报道。根据文献[16]的分析研究，β 越小误差越大，而 β 越大收敛性越差，通常取 β 在 1 到 10 之间。本文大部分计算 β 的取值都在 1 到 10 之间。

§ 2.4.2 流通量分裂法及基函数格式的表达

我们将粘性不可压缩流动的 N-S 方程改写为双曲型方程后，便可以用流通量分裂技术来处理方程组(2.4.3)。根据方程的特点，对其中的惯性项采用一阶迎风格式，粘性项则采用中心格式，构造出混合格式的基函数形式。

2.4.2.1 流通量的分裂

首先，我们对 N-S 方程（2.4.3）采用流通量分裂技术。将连续方程和动量方程写为统一的三维人工压缩守恒型 N-S 方程，即是[18]：

$$
I_m \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial (E - E_v)}{\partial x} + \frac{\partial (F - F_v)}{\partial y} + \frac{\partial (G - G_v)}{\partial z} = 0 \tag{2.4.4}
$$

非定常情况下，$I_m = diag(0,1,1,1)$；定常情况下 I_m=0 。

$$Q=\begin{pmatrix}p\\u\\v\\w\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}\beta u\\u^2+p\\uv\\uw\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}\beta v\\uv\\v^2+p\\vw\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}\beta w\\uw\\vw\\w^2+p\end{pmatrix},$$

$$E_v=\frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix}0\\u_x\\v_x\\w_x\end{pmatrix}=\frac{\partial H}{\partial x},\quad F_v=\frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix}0\\u_y\\v_y\\w_y\end{pmatrix}=\frac{\partial H}{\partial y},\quad G_v=\frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix}0\\u_z\\v_z\\w_z\end{pmatrix}=\frac{\partial H}{\partial z} \tag{2.4.5}$$

其中 $H=\frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix}0\\u\\v\\w\end{pmatrix}$

令 $$R=\frac{\partial(E-E_v)}{\partial x}+\frac{\partial(F-F_v)}{\partial y}+\frac{\partial(G-G_v)}{\partial z}, \tag{2.4.6}$$

(2.4.4)式可化为： $$\frac{\partial Q}{\partial \tau}=-R-I_m\frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{2.4.7}$$

本文中仅讨论定常情形，(2.4.7)式可简化为：

$$\Delta Q=-\Delta\tau\cdot R \tag{2.4.8}$$

将(2.4.6)式改写为

$$R=A\frac{\partial Q}{\partial x}+B\frac{\partial Q}{\partial y}+C\frac{\partial Q}{\partial z}-H_{xx}-H_{yy}-H_{zz} \tag{2.4.9}$$

其中：

$$A=\frac{\partial E}{\partial Q}=\begin{pmatrix}0&\beta&0&0\\1&2u&0&0\\0&v&u&0\\0&w&0&u\end{pmatrix},\quad B=\frac{\partial F}{\partial Q}=\begin{pmatrix}0&0&\beta&0\\0&v&u&0\\1&0&2v&0\\0&0&w&v\end{pmatrix},\quad C=\frac{\partial G}{\partial Q}=\begin{pmatrix}0&0&0&\beta\\0&w&0&u\\0&0&w&v\\1&0&0&2w\end{pmatrix},$$

$$H_{xx}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix}0\\u_{xx}\\v_{xx}\\w_{xx}\end{pmatrix},\quad H_{yy}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix}0\\u_{yy}\\v_{yy}\\w_{yy}\end{pmatrix},\ \text{及}\ H_{zz}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix}0\\u_{zz}\\v_{zz}\\w_{zz}\end{pmatrix} \tag{2.4.10}$$

令 $R=R1+R2$, 其中 $R1$ 为惯性项，$R2$ 为粘性项，即：

$$R1=A\frac{\partial Q}{\partial x}+B\frac{\partial Q}{\partial y}+C\frac{\partial Q}{\partial z},\qquad R2=-H_{xx}-H_{yy}-H_{zz}, \tag{2.4.11}$$

我们用一阶迎风格式处理 $R1$，用一阶中心格式处理 $R2$。

1．$R1$ 的处理

对于(2.4.11)式中的 A，必存在一非奇异矩阵 R_x，使得

$A = R_x \Lambda_x R_x^{-}$，其中 $\Lambda_x = diag(\lambda_x^{\ 1}, \lambda_x^{\ 2}, \lambda_x^{\ 3}, \lambda_x^{\ 4})$ 为 A 的特征矩阵，并且求得特征值：

$$\lambda_x^{\ 1} = \lambda_x^{\ 2} = u, \qquad \lambda_x^{\ 3} = u + \sqrt{u^2 + \beta}, \qquad \lambda_x^{\ 4} = u - \sqrt{u^2 + \beta} \tag{2.4.12}$$

按正、负特征值，可以将 Λ_x 分裂

$$\Lambda_x = \Lambda_x^+ + \Lambda_x^- \tag{2.4.13}$$

$$\Lambda_x^{\pm} = diag(\lambda_1^{\pm}, \ldots, \ \lambda_4^{\pm}) \quad , \quad \lambda_l^{\pm} = (\lambda_l \pm |\lambda_l|)/2$$

$$A^{\pm} = R_x \Lambda_x^{\pm} R_x^{-}, \quad A = A^+ + A^- \tag{2.4.14}$$

令 $C_x = \sqrt{u^2 + \beta}$，则：

$$R_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_x & -C_x \\ 0 & 0 & 1 + \dfrac{u\lambda_x^{\ 3}}{\beta} & 1 + \dfrac{u\lambda_x^{\ 4}}{\beta} \\ \sqrt{2} & 0 & \dfrac{v\lambda_x^{\ 3}}{\beta} & \dfrac{v\lambda_x^{\ 4}}{\beta} \\ 0 & \sqrt{2} & \dfrac{\omega\lambda_x^{\ 3}}{\beta} & \dfrac{\omega\lambda_x^{\ 4}}{\beta} \end{pmatrix}, \tag{2.4.15}$$

$$R_x^{-1} = \frac{1}{4C_x(1+\dfrac{u^2}{\beta})} \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}\dfrac{C_x v}{\beta} & -2\sqrt{2}\dfrac{C_x uv}{\beta} & 2\sqrt{2}C_x(1+\dfrac{u^2}{\beta}) & 0 \\ -2\sqrt{2}\dfrac{C_x \omega}{\beta} & -2\sqrt{2}\dfrac{C_x u\omega}{\beta} & 0 & 2\sqrt{2}C_x(1+\dfrac{u^2}{\beta}) \\ 2(1+u^2/\beta) - \dfrac{2C_x u}{\beta} & 2C_x & 0 & 0 \\ -2(1+u^2/\beta) - \dfrac{2C_x u}{\beta} & 2C_x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tag{2.4.16}$$

$$A=R_x\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4\end{pmatrix}R_x^{-1}$$

$$=\frac{1}{4C_x(1+\frac{u^2}{\beta})}\begin{pmatrix} 2(1+\frac{u^2}{\beta})C_x(\lambda_3+\lambda_4)-\frac{2C_x^{\ 2}u}{\beta}(\lambda_3-\lambda_4) & 2C_x^{\ 2}(\lambda_3-\lambda_4) & 0 & 0 \\ \begin{array}{l}(1+\frac{u\lambda_x^{\ 3}}{\beta})\lambda_3[2(1+\frac{u^2}{\beta})-\frac{2C_x u}{\beta}]+\\(1+u\frac{\lambda_x^{\ 4}}{\beta})\lambda_4[-2(1+\frac{u^2}{\beta})-\frac{2C_x u}{\beta}]\end{array} & \begin{array}{l}2C_x[(1+\frac{u\lambda_x^{\ 3}}{\beta})\lambda_3\\+(1+\frac{u\lambda_x^{\ 4}}{\beta})\lambda_4]\end{array} & 0 & 0 \\ \begin{array}{l}\frac{-4C_x v\lambda_1}{\beta}+2\frac{(1+\frac{u^2}{\beta})v}{\beta}(\lambda_3\lambda_x^{\ 3}-\lambda_4\lambda_x^{\ 4})\\-\frac{2C_x uv}{\beta^2}(\lambda_3\lambda_x^{\ 3}+\lambda_4\lambda_x^{\ 4})\end{array} & \begin{array}{l}-\frac{4C_x uv}{\beta}\lambda_1+\\\frac{2C_x v}{\beta}(\lambda_3\lambda_x^{\ 3}+\lambda_4\lambda_x^{\ 4})\end{array} & 4C_x\lambda_1(1+\frac{u^2}{\beta}) & 0 \\ \begin{array}{l}\frac{-4C_x\omega\lambda_2}{\beta}+2\frac{(1+\frac{u^2}{\beta})\omega}{\beta}(\lambda_3\lambda_x^{\ 3}-\lambda_4\lambda_x^{\ 4})\\-\frac{2C_x u\omega}{\beta^2}(\lambda_3\lambda_x^{\ 3}+\lambda_4\lambda_x^{\ 4})\end{array} & \begin{array}{l}-\frac{4C_x u\omega}{\beta}\lambda_2+\\\frac{2C_x\omega}{\beta}(\lambda_3\lambda_x^{\ 3}+\lambda_4\lambda_x^{\ 4})\end{array} & 0 & 4C_x\lambda_2(1+\frac{u^2}{\beta}) \end{pmatrix}$$

(2.4.17)

在(2.4.17)中，$\lambda_i=\lambda_i^{\ +}+\lambda_i^{\ -},\qquad (i=1,2,3,4)$，

$$A^+=R_x\begin{pmatrix}\lambda_1^{\ +} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^{\ +} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3^{\ +} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^{\ +}\end{pmatrix}R_x^{\ -1},\quad A^-=R_x\begin{pmatrix}\lambda_1^{\ -} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^{\ -} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3^{\ -} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^{\ -}\end{pmatrix}R_x^{\ -1} \tag{2.4.18}$$

同理，B 可以写为：$B=R_y\Lambda_y R_y^{\ -}$，

其中 $\Lambda_y=diag(\lambda_y^{\ 1},\lambda_y^{\ 2},\lambda_y^{\ 3},\lambda_y^{\ 4})$ 为 B 的特征矩阵，并且求得特征值：

$$\lambda_y^{\ 1}=\lambda_y^{\ 2}=v,\qquad \lambda_y^{\ 3}=v+\sqrt{v^2+\beta},\qquad \lambda_y^{\ 4}=v-\sqrt{v^2+\beta} \tag{2.4.19}$$

令 $C_y=\sqrt{v^2+\beta}$，可求得：

$$B=R_y\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4\end{pmatrix}R_y^{-1}$$

$$=\frac{1}{4C_y(1+\frac{v^2}{\beta})}\begin{pmatrix} 2(1+\frac{v^2}{\beta})C_y(\lambda_3+\lambda_4)-\frac{2C_y^2 v}{\beta}(\lambda_3-\lambda_4) & 0 & 2C_y^2(\lambda_3-\lambda_4) & 0\\ \frac{-4C_y u\lambda_2}{\beta}+2\frac{(1+\frac{v^2}{\beta})u}{\beta}(\lambda_3\lambda_y^3-\lambda_4\lambda_y^4) -\frac{2C_y uv}{\beta^2}(\lambda_3\lambda_y^3+\lambda_4\lambda_y^4) & 4C_y\lambda_2(1+\frac{v^2}{\beta}) & -\frac{4C_y uv}{\beta}\lambda_2+\frac{2C_y u}{\beta}(\lambda_3\lambda_y^3+\lambda_4\lambda_y^4) & 0\\ (1+\frac{v\lambda_y^3}{\beta})\lambda_3[2(1+\frac{v^2}{\beta})-\frac{2C_y v}{\beta}]+(1+v\frac{\lambda_y^4}{\beta})\lambda_4[-2(1+\frac{v^2}{\beta})-\frac{2C_y v}{\beta}] & 0 & 2C_y[(1+\frac{v\lambda_y^3}{\beta})\lambda_3+(1+\frac{v\lambda_y^4}{\beta})\lambda_4] & 0\\ \frac{-4C_y\omega\lambda_1}{\beta}+2\frac{(1+\frac{v^2}{\beta})\omega}{\beta}(\lambda_3\lambda_y^3-\lambda_4\lambda_y^4) -\frac{2C_y v\omega}{\beta^2}(\lambda_3\lambda_y^3+\lambda_4\lambda_y^4) & 0 & -\frac{4C_y v\omega}{\beta}\lambda_1+\frac{2C_y\omega}{\beta}(\lambda_3\lambda_y^3+\lambda_4\lambda_y^4) & 4C_y\lambda_1(1+\frac{v^2}{\beta}) \end{pmatrix} \qquad (2.4.20)$$

在(2.4.20)中，$\lambda_i=\lambda_i^{+}+\lambda_i^{-}, \qquad (i=1,2,3,4)$，

$$B^{+}=R_y\begin{pmatrix}\lambda_1^{+} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^{+} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3^{+} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^{+}\end{pmatrix}R_y^{-1},\quad B^{-}=R_y\begin{pmatrix}\lambda_1^{-} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^{-} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3^{-} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^{-}\end{pmatrix}R_y^{-1} \qquad (2.4.21)$$

将 C 写为：$C=R_z\Lambda_z R_z^{-}$，

其中 $\Lambda_z=diag(\lambda_z^1,\lambda_z^2,\lambda_z^3,\lambda_z^4)$ 为 C 的特征矩阵，并且求得特征值：

$$\lambda_z^1=\lambda_z^2=\omega, \qquad \lambda_z^3=\omega+\sqrt{\omega^2+\beta}, \qquad \lambda_z^4=\omega-\sqrt{\omega^2+\beta} \qquad (2.4.22)$$

令 $C_z=\sqrt{\omega^2+\beta}$，可求得：

$$C=R_z\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4\end{pmatrix}R_z^{-1}$$

$$=\frac{1}{4C_z(1+\frac{\omega^2}{\beta})}\begin{pmatrix}
2(1+\frac{\omega^2}{\beta})C_z(\lambda_3+\lambda_4)-\frac{2C_z^{\ 2}\omega}{\beta}(\lambda_3-\lambda_4) & 0 & 0 & 2C_z^{\ 2}(\lambda_3-\lambda_4)\\
\begin{array}{l}\frac{-4C_z u\lambda_1}{\beta}+2\frac{(1+\frac{\omega^2}{\beta})u}{\beta}(\lambda_3\lambda_z^{\ 3}-\lambda_4\lambda_z^{\ 4})\\ -\frac{2C_z u\omega}{\beta^2}(\lambda_3\lambda_z^{\ 3}+\lambda_4\lambda_z^{\ 4})\end{array} & 4C_z\lambda_1(1+\frac{\omega^2}{\beta}) & 0 & \begin{array}{l}-\frac{4C_z u\omega}{\beta}\lambda_1+\\ \frac{2C_z u}{\beta}(\lambda_3\lambda_z^{\ 3}+\lambda_4\lambda_z^{\ 4})\end{array}\\
\begin{array}{l}\frac{-4C_z v\lambda_2}{\beta}+2\frac{(1+\frac{\omega^2}{\beta})v}{\beta}(\lambda_3\lambda_z^{\ 3}-\lambda_4\lambda_z^{\ 4})\\ -\frac{2C_z v\omega}{\beta^2}(\lambda_3\lambda_z^{\ 3}+\lambda_4\lambda_z^{\ 4})\end{array} & 0 & 4C_z\lambda_2(1+\frac{\omega^2}{\beta}) & \begin{array}{l}-\frac{4C_z v\omega}{\beta}\lambda_2+\\ \frac{2C_z v}{\beta}(\lambda_3\lambda_z^{\ 3}+\lambda_4\lambda_z^{\ 4})\end{array}\\
\begin{array}{l}(1+\frac{\omega\lambda_z^{\ 3}}{\beta})\lambda_3[2(1+\frac{\omega^2}{\beta})-\frac{2C_z\omega}{\beta}]+\\ (1+\omega\frac{\lambda_z^{\ 4}}{\beta})\lambda_4[-2(1+\frac{\omega^2}{\beta})-\frac{2C_z\omega}{\beta}]\end{array} & 0 & 0 & \begin{array}{l}2C_z[(1+\frac{\omega\lambda_z^{\ 3}}{\beta})\lambda_3\\ +(1+\frac{\omega\lambda_z^{\ 4}}{\beta})\lambda_4]\end{array}
\end{pmatrix}$$

(2.4.23)

在(2.4.23)中，$\lambda_i=\lambda_i^{\ +}+\lambda_i^{\ -}, \qquad (i=1,2,3,4)$，

$$C^+=R_z\begin{pmatrix}\lambda_1^{\ +} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^{\ +} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3^{\ +} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^{\ +}\end{pmatrix}R_z^{-1},\quad C^-=R_z\begin{pmatrix}\lambda_1^{\ -} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^{\ -} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3^{\ -} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^{\ -}\end{pmatrix}R_z^{-1} \qquad (2.4.24)$$

则 $R1$ 可写为：

$$R1=R1^++R1^-=(A^+\frac{\partial Q}{\partial x}+B^+\frac{\partial Q}{\partial y}+C^+\frac{\partial Q}{\partial z})+(A^-\frac{\partial Q}{\partial x}+B^-\frac{\partial Q}{\partial y}+C^-\frac{\partial Q}{\partial z}) \qquad (2.4.25)$$

对 $R1^+$和 $R1^-$分别采取迎风格式和负迎风格式，即(2.3.14a)和(2.3.14b)式(m=1)。

2．$R2$ 的处理

对粘性项 $R2$ 采用一阶中心格式，即(2.3.13)式(m=2)。

2.4.2.2 不可压缩流体 N-S 方程基函数格式的表达

通过上面的分析，我们可以给出三维不可压缩流体 N-S 方程一阶基函数格式的表达式（显式）如下：

$$Q^{n+1}=Q^n-\Delta\tau\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\left(A^+(\frac{\partial Q}{\partial x})^{1U+}+B^+(\frac{\partial Q}{\partial y})^{1U+}+C^+(\frac{\partial Q}{\partial z})^{1U+}\right)+\\ \left(A^-(\frac{\partial Q}{\partial x})^{1U-}+B^-(\frac{\partial Q}{\partial y})^{1U-}+C^-(\frac{\partial Q}{\partial z})^{1U-}\right)\end{array}\right]\\ -\left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)^{1C}+\left(\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)^{1C}+\left(\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right)^{1C}\right]\end{array}\right\} \tag{2.4.26}$$

式中

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial x_j}\right]_n^{1U+}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_n^{e_i}}{A_{e_i}}}\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_n^{e_i}}{A_{e_i}}\left[\frac{\partial Q^{(1)}}{\partial x_j}\right]_n^{e_i}\qquad\begin{pmatrix}j=1,2,3\\ x_1=x,x_1=y,x_3=z\end{pmatrix} \tag{2.4.27a}$$

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial x_j}\right]_n^{1U-}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1-\alpha_n^{e_i}}{A_{e_i}}}\sum_{i=1}^{N}\frac{1-\alpha_n^{e_i}}{A_{e_i}}\left[\frac{\partial Q^{(1)}}{\partial x_j}\right]_n^{e_i}\qquad\begin{pmatrix}j=1,2,3\\ x_1=x,x_1=y,x_3=z\end{pmatrix} \tag{2.4.27b}$$

$$\left[\frac{\partial^2 H}{\partial x_j^{\ 2}}\right]_n^{1C}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{A_{e_i}}}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{A_{e_i}}\left[\frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial x_j^{\ 2}}\right]_n^{e_i}\qquad\begin{pmatrix}j=1,2,3\\ x_1=x,x_1=y,x_3=z\end{pmatrix} \tag{2.4.27c}$$

(2.4.26)式就是具有一阶精度的，处理不可压缩粘性流动一阶三角函数型的基函数格式。

§ 2.4.3 边界条件和初始条件

2.4.3.1 边界条件

本文的算例中，流场所涉及的边界主要为物面固壁边界和远场边界。在计算中，首先将边界点与流场的内点一起推进一步，然后在用边界条件加以修正。这种处理会使边界点上的物理量相对滞后，但不会影响计算收敛以后得到的解。

1．固壁边界

对于粘性不可压缩流体，在壁面上应该满足粘附条件，即

$$u=v=w=0 \tag{2.4.28}$$

2．远场边界（以圆管为例）

外部边界包括入流面和出流面，对于定常情形，出口和入口的条件都比较容易给出。

入口条件：

$$p=P_0,\ u=U_0\ \ v=0,\ w=0 \tag{2.4.29a}$$

P_0 和 U_0 均为常数，分别为入口的压力和平均速度值。

出口条件：

$$p=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}=0, \frac{\partial v}{\partial x}=0, \frac{\partial w}{\partial x}=0 \tag{2.4.29b}$$

2.4.3.2 初始条件

本文涉及的几个算例都是定常的。我们采取虚拟时间推进的方法进行迭代，此时无论给出何种初值，只要不影响计算的收敛，当时间趋于无穷时，都能得到唯一的定常解。为获得定常解，本文采用均匀来流作为初始条件，设来流沿 x 正方向，则初始条件为：

$$\begin{aligned} p\big|_{t=0} &= p_\infty = P_0 \\ u\big|_{t=0} &= u_\infty = U_0 \\ v\big|_{t=0} &= v_\infty = 0 \\ w\big|_{t=0} &= w_\infty = 0 \end{aligned} \tag{2.4.30}$$

对于非定常问题，应视不同问题给出不同的初始条件。

§ 2.4.4 不可压缩流体 N-S 方程的基函数格式计算流程

1．网格生成：详见§ 2.2。

2．数值计算

（1） 已知 $t=t^n$ 时刻的结果 Q^n （n=0 时即为初值），求 $t=t^n+\Delta t$ 时刻的 Q 值： $Q^{n+1}=Q^n+\Delta Q$；

（2） 对每点根据 Q^n 计算分裂通量 A^+， A^-， B^+， B^-， C^+ 和 C^-；

（3） 对每点根据 Q^n 计算一阶精度的 Q 的一阶导数值 $\frac{\partial Q}{\partial x}$，$\frac{\partial Q}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial z}$，及 H 的二阶导数值 $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$， $\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$ 和 $\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}$；

（4） 对于惯性项中的一阶导数 $\frac{\partial Q}{\partial x}$，$\frac{\partial Q}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial z}$，对每个节点在各个不同的

单元内根据迎风面积和背风面积进行加权平均，利用(2.4.27a)和(2.4.27b)式分别求出该节点在各方向上的唯一的迎风格式的导数值$(\frac{\partial Q}{\partial x})^{1U+}$，$(\frac{\partial Q}{\partial y})^{1U+}$，$(\frac{\partial Q}{\partial z})^{1U+}$和负迎风格式的导数值$(\frac{\partial Q}{\partial x})^{1U-}$，$(\frac{\partial Q}{\partial y})^{1U-}$，$(\frac{\partial Q}{\partial z})^{1U-}$；

（5） 对于粘性项中的二阶导数$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$和$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}$，利用(2.4.27c)可求出每个节点的唯一的中心格式的导数值；

（6） 将上述导数值及通量带入（2.4.26），求出 Q 的增量，并由此算出新的 Q 值；

（7） 这样一直迭代下去，直到数值解达到要求的精度为止。

§2.5 二维不可压缩流体 N-S 方程基函数格式的构建

二维粘性不可压缩流体的 N-S 方程组经无量纲及引入人工压缩性项后，与三维情况下的(2.4.3)式形式相同：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\beta}\frac{\partial p}{\partial \tau}+\nabla\bullet\vec{v}=0\\&\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\bullet\nabla\vec{v}=-\nabla p+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\vec{v}\end{aligned}\tag{2.4.3}$$

只不过这里$\vec{v}$是二维速度向量。

改写为统一的二维人工压缩守恒型 N-S 方程：

$$I_m\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial \tau}+\frac{\partial (E-E_v)}{\partial x}+\frac{\partial (F-F_v)}{\partial y}=0\tag{2.5.1}$$

非定常：$I_m=diag(0,1,1)$，定常：I_m=0，t: 物理时间，τ：虚拟时间。

$$Q=\begin{pmatrix}p\\u\\v\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}\beta u\\u^2+p\\uv\end{pmatrix},F=\begin{pmatrix}\beta v\\uv\\v^2+p\end{pmatrix},E_v=\frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix}0\\u_x\\v_x\end{pmatrix},F_v=\frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix}0\\u_y\\v_y\end{pmatrix}\tag{2.5.2}$$

下面只讨论定常显式：I_m=0。

令 $R=\frac{\partial (E-E_v)}{\partial x}+\frac{\partial (F-F_v)}{\partial y}$，则 $\Delta Q=-\Delta\tau\cdot R$。

R 可写为：$R=A\frac{\partial Q}{\partial x}+B\frac{\partial Q}{\partial y}-(E_v)_x-(F_v)_y$， (2.5.3)

其中：$A=\dfrac{\partial E}{\partial Q}=\begin{pmatrix}0 & \beta & 0\\ 1 & 2u & 0\\ 0 & v & u\end{pmatrix}$，$B=\dfrac{\partial F}{\partial Q}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \beta\\ 0 & v & u\\ 1 & 0 & 2v\end{pmatrix}$，

$$E_v=\frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix}0\\ u_x\\ v_x\end{pmatrix}=\frac{\partial H}{\partial x},\quad F_v=\frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix}0\\ u_y\\ v_y\end{pmatrix}=\frac{\partial H}{\partial y},\quad H=\frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix}0\\ u\\ v\end{pmatrix}\tag{2.5.4}$$

特征分裂： $A=A^{+}+A^{-}$， $B=B^{+}+B^{-}$ ，

$$R=\underbrace{(A^{+}\frac{\partial Q}{\partial x}+B^{+}\frac{\partial Q}{\partial y})}_{\text{迎风格式（+）}}+\underbrace{(A^{-}\frac{\partial Q}{\partial x}+A^{-}\frac{\partial Q}{\partial y})}_{\text{迎风格式（-）}}\underbrace{-H_{xx}-H_{yy}}_{\text{中心格式}}\tag{2.5.5}$$

$A=R_x\Lambda_x R_x^{-}$，其中$\Lambda_x=diag(\lambda_x^{\ 1},\lambda_x^{\ 2},\lambda_x^{\ 3})$为 A 的特征矩阵，并且求得特征值：

$$\lambda_x^{\ 1}=u,\qquad \lambda_x^{\ 2}=u+\sqrt{u^2+\beta},\qquad \lambda_x^{\ 3}=u-\sqrt{u^2+\beta}\tag{2.5.6}$$

令 $C_x=\sqrt{u^2+\beta}$，则：

$$R_x=\begin{pmatrix}0 & C_x & -C_X\\ 0 & 1+\dfrac{u\lambda_x^{\ 2}}{\beta} & 1+\dfrac{u\lambda_x^{\ 3}}{\beta}\\ \sqrt{2} & \dfrac{v\lambda_x^{\ 2}}{\beta} & \dfrac{v\lambda_x^{\ 3}}{\beta}\end{pmatrix}\tag{2.5.7}$$

$$R_x^{\ -1}=\frac{1}{4C_x(1+\dfrac{u^2}{\beta})}\begin{pmatrix}-2\sqrt{2}\dfrac{C_x v}{\beta} & -2\sqrt{2}\dfrac{C_x uv}{\beta} & 2\sqrt{2}C_x(1+\dfrac{u^2}{\beta})\\ 2(1+u^2/\beta)-\dfrac{2C_x u}{\beta} & 2C_x & 0\\ -2(1+u^2/\beta)-\dfrac{2C_x u}{\beta} & 2C_x & 0\end{pmatrix}\tag{2.5.8}$$

$$A = R_x \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} {R_x}^{-1}$$

$$= \frac{1}{4C_x(1+\frac{u^2}{\beta})} \begin{pmatrix} 2(1+\frac{u^2}{\beta})C_x(\lambda_2+\lambda_3) - \frac{2{C_x}^2 u}{\beta}(\lambda_2-\lambda_3) & 2{C_x}^2(\lambda_2-\lambda_3) & 0 \\ \begin{matrix} (1+\frac{u{\lambda_x}^2}{\beta})\lambda_2[2(1+\frac{u^2}{\beta}) - \frac{2C_x u}{\beta}] + \\ (1+u\frac{{\lambda_x}^3}{\beta})\lambda_3[-2(1+\frac{u^2}{\beta}) - \frac{2C_x u}{\beta}] \end{matrix} & \begin{matrix} 2C_x[(1+\frac{u{\lambda_x}^2}{\beta})\lambda_2 \\ +(1+\frac{u{\lambda_x}^3}{\beta})\lambda_3] \end{matrix} & 0 \\ \begin{matrix} \frac{-4C_x v\lambda_1}{\beta} + 2\frac{(1+\frac{u^2}{\beta})v}{\beta}(\lambda_2{\lambda_x}^2 - \lambda_3{\lambda_x}^3) \\ -\frac{2C_x uv}{\beta^2}(\lambda_2{\lambda_x}^2 + \lambda_3{\lambda_x}^3) \end{matrix} & \begin{matrix} -\frac{4C_x uv}{\beta}\lambda_1 + \\ \frac{2C_x v}{\beta}(\lambda_2{\lambda_x}^2 + \lambda_3{\lambda_x}^3) \end{matrix} & 4C_x\lambda_1(1+\frac{u^2}{\beta}) \end{pmatrix}$$

(2.5.9)

下面来求 B：

$B = R_y \Lambda_y {R_y}^{-}$，其中 $\Lambda_y = diag({\lambda_y}^1, {\lambda_y}^2, {\lambda_y}^3)$ 为 B 的特征矩阵，并且求得特征值：

$$ {\lambda_y}^1 = v, \qquad {\lambda_y}^2 = v + \sqrt{v^2+\beta}, \qquad {\lambda_y}^3 = v - \sqrt{v^2+\beta} \qquad (2.5.10)$$

令 $C_y = \sqrt{v^2+\beta}$，可求得：

$$B = R_y \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} R_y^{-1}$$

$$= \frac{1}{4C_y(1+\frac{v^2}{\beta})} \begin{pmatrix} 2(1+\frac{v^2}{\beta})C_y(\lambda_2+\lambda_3) - \frac{2C_y{}^2 v}{\beta}(\lambda_2-\lambda_3) & 0 & 2C_y{}^2(\lambda_2-\lambda_3) \\ \begin{gathered}\frac{-4C_y u\lambda_2}{\beta} + 2\frac{(1+\frac{v^2}{\beta})u}{\beta}(\lambda_2\lambda_y{}^2 - \lambda_3\lambda_y{}^3) \\ -\frac{2C_y uv}{\beta^2}(\lambda_2\lambda_y{}^2 + \lambda_3\lambda_y{}^3)\end{gathered} & 4C_y\lambda_1(1+\frac{v^2}{\beta}) & \begin{gathered}-\frac{4C_y uv}{\beta}\lambda_1 + \\ \frac{2C_y u}{\beta}(\lambda_2\lambda_y{}^2 + \lambda_3\lambda_y{}^3)\end{gathered} \\ \begin{gathered}(1+\frac{v\lambda_y{}^2}{\beta})\lambda_2[2(1+\frac{v^2}{\beta}) - \frac{2C_y v}{\beta}] + \\ (1+\frac{v\lambda_y{}^3}{\beta})\lambda_3[-2(1+\frac{v^2}{\beta}) - \frac{2C_y v}{\beta}]\end{gathered} & 0 & \begin{gathered}2C_y[(1+\frac{v\lambda_y{}^2}{\beta})\lambda_2 \\ +(1+\frac{v\lambda_y{}^3}{\beta})\lambda_3]\end{gathered} \end{pmatrix} \tag{2.5.11}$$

二维不可压缩流体 N-S 方程一阶基函数格式的表达式（显式）如下：

$$Q^{n+1} = Q^n - \Delta\tau \left\{ \begin{aligned} &\left[\left[\left(A^+(\frac{\partial Q}{\partial x})^{1U+} + B^+(\frac{\partial Q}{\partial y})^{1U+}\right) + \left(A^-(\frac{\partial Q}{\partial x})^{1U-} + B^-(\frac{\partial Q}{\partial y})^{1U-}\right)\right]\right] \\ &-\left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)^{1C} + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)^{1C}\right] \end{aligned} \right\} \tag{2.5.12}$$

式中

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial x_j}\right]_n^{1U+} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_n^{e_i}}{A_{e_i}}} \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_n^{e_i}}{A_{e_i}} \left[\frac{\partial Q^{(1)}}{\partial x_j}\right]_n^{e_i} \qquad \begin{pmatrix} j = 1,2 \\ x_1 = x, x_1 = y \end{pmatrix} \tag{2.5.13a}$$

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial x_j}\right]_n^{1U-} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1-\alpha_n^{e_i}}{A_{e_i}}} \sum_{i=1}^{N} \frac{1-\alpha_n^{e_i}}{A_{e_i}} \left[\frac{\partial Q^{(1)}}{\partial x_j}\right]_n^{e_i} \qquad \begin{pmatrix} j = 1,2 \\ x_1 = x, x_1 = y \end{pmatrix} \tag{2.5.13b}$$

$$\left[\frac{\partial^2 H}{\partial x_j^{\ 2}}\right]_n^{1C} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{A_{e_i}}}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{A_{e_i}}\left[\frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial x_j^{\ 2}}\right]_n^{e_i} \quad \begin{pmatrix} j=1,2 \\ x_1 = x, x_1 = y \end{pmatrix} \tag{2.5.13c}$$

(2.5.12)式就是具有一阶精度的，处理不可压缩粘性流动一阶三角函数型的基函数格式。

§2.6 数值结果及分析

为了验证三角函数基函数法在二维及三维粘性不可压缩流动中的有效性，本文选择以下两个算例：有限长两平行平板组成的二维渠道和有限长圆管，考虑渠道和圆管内粘性不可压缩流动的定常流动。流体取为血液（牛顿流体）。设 L 是平板长度或圆管长度，R 为两平板间间距的一半或圆管半径。取 R=0.002m，L=40R，取雷诺数 Re=400，根据雷诺数定义 $\mathrm{Re} = \dfrac{U_0 R}{\nu}$，血液的 $\nu = 3.5\times10^{-6} m^2\cdot s^{-1}$，算出平均速度 $U_0 = 0.7 m\cdot s^{-1}$。

我们采用三角函数基函数格式（2.5.12 和 2.4.26 式）数值地计算此二算例。虽然圆管内流动是轴对称的，但为了检验三维基函数格式，仍采用三维方程。

边界条件取：壁面上 $u = v = 0$（三维加 $w = 0$）

入口处 p=P_0, $u = U_0$ v=0 （三维加 w=0）

出口处 p=0, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$ （三维加 $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0$）

其中 P_0=1.176kPa（二维），P_0=3.136kPa（三维）。

因为我们取 L/R=40，所以这是一个细长的二维渠道和圆管。除了入口附近很小区域内流场的速度剖面呈现出由均匀分布向抛物分布过渡的入口流特征，渠道内或圆管内绝大多数区域中的流动将非常接近经典的库塔流或泊肃叶流。根据这样的分析，我们可以通过比较中心处和其附近的速度剖面是否和库塔流或泊肃叶流的抛物分布符合以及入口附近流动是否呈现入口流特征来判断三角函数基函数在计算粘性不可压缩流动中的可行性。

1. 二维渠道内流动

坐标轴选取及计算网格如图 2-6-1，以两平板的中点为原点，x 轴平行于两平板方向，y 轴垂直于平板。图 2-6-2 为两平板间等压线分布图，图 2-6-3 是使用基函数法数值计算出的 y=0 处的压力沿 x 轴变化曲线与库塔流结果的比较，图 2-6-4~2-6-8 是入口段速度分布——分别为距入口 0.1R、0.5R、R、2R 和 4R 处的速度剖面，图 2-6-9 为 x=0 处计算所得的速度剖面与库塔流精确解的比较，图 2-6-10 为 x=0、x=-5R 及 x=5R 处速度剖面比较。图中

计算区域的线性尺度、速度和压力分别按 R、平均速度 U_0 和 ρU_0^2 归一化。

2. 圆管内流动

坐标轴选取及网格如图 2-6-11，圆管中心位置为原点，x 轴沿管轴方向。考虑其对称性，本文只研究对称面 z=0 上的流动情况。图 2-6-12 为圆管内 z=0 平面的等压线分布图，图 2-6-13 是数值计算出的管轴处的压力变化曲线与泊肃叶流的比较，图 2-6-14~2-6-17 是入口段速度分布——分别为距入口 0.1R、0.7R、2R 和 4R 处的速度剖面，图 2-6-18 为 x=0 处计算所得的速度剖面与泊肃叶流精确解的比较，图 2-6-19 为 x=0、x=-5R 及 x=5R 处速度剖面比较。图中计算区域的线性尺度、速度和压力分别按 R、平均速度 U_0 和 ρU_0^2 归一化。

从以上图中可以看出，有限长二维渠道流和有限长圆管流数值计算所得的中心和大部分区域的速度分布（图 2-6-9、2-6-10 和图 2-6-18、2-6-19），以及压力沿 x 轴变化曲线（图 2-6-3 和图 2-6-13）和库塔流及泊肃叶流的结果十分吻合。而入口段速度分布（图 2-6-4~2-6-8，图 2-6-14~2-6-17）则呈现入口段的特征[59]。

由于我们使用的是完整的 N-S 方程，没有做任何删简，因此能够得到与库塔流、泊肃叶流精确解十分吻合的结果说明三角函数基函数法在数值模拟粘性不可压缩流动方面是成功的，可行的。

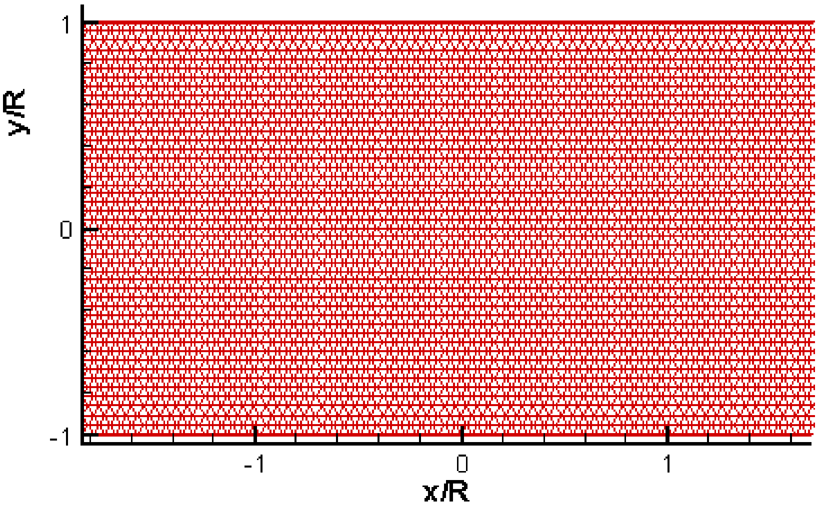


图 2-6-1 有限长平行平板组成的二维渠道内流动网格

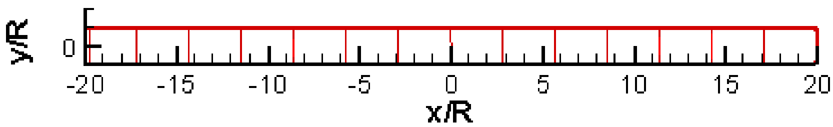


图 2-6-2 二维渠道内流动等压线分布

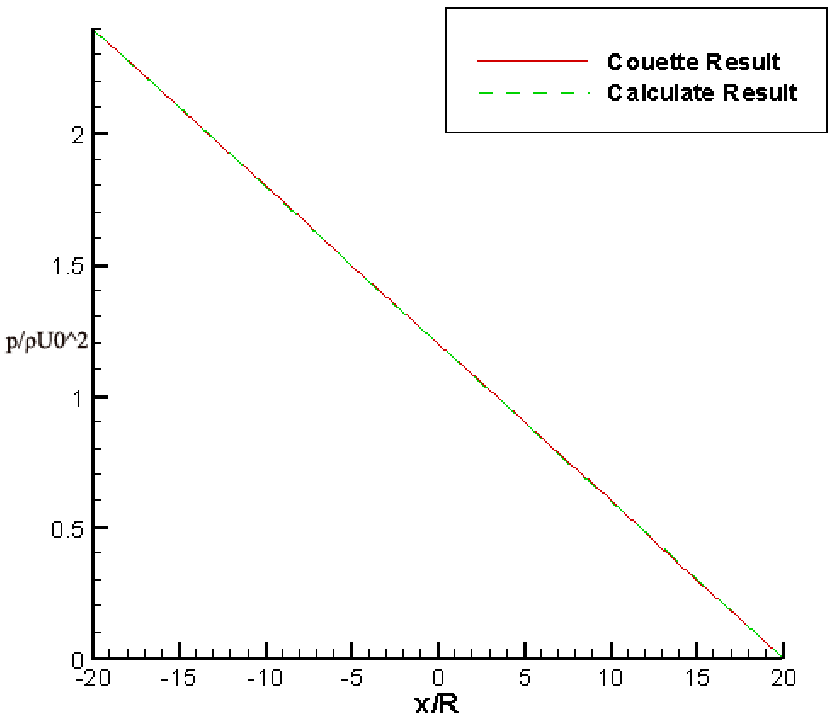


图 2-6-3 二维渠道内流动压力沿轴向分布及与库塔流的比较

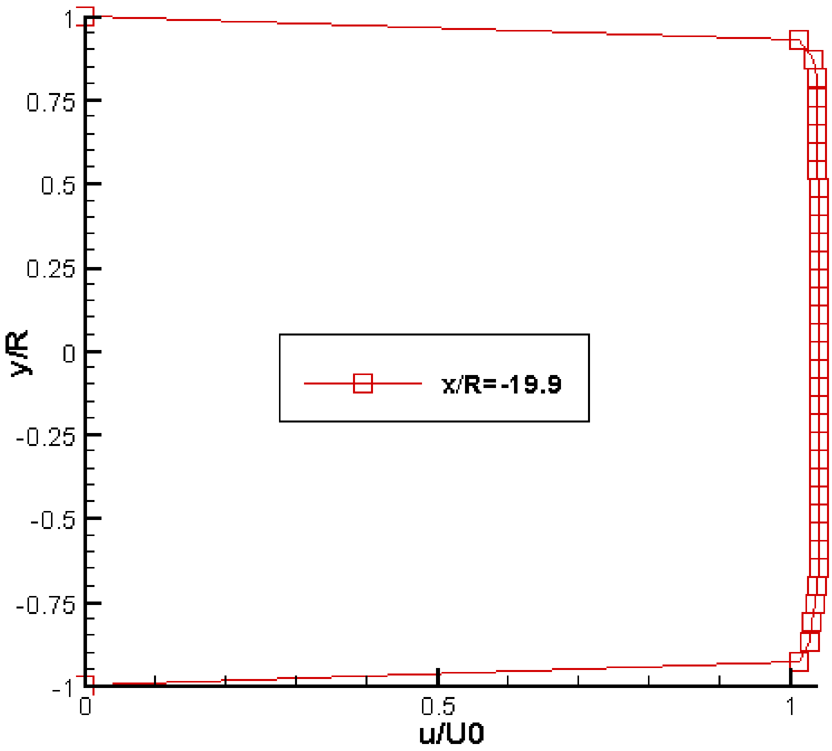


图 2-6-4 二维渠道内流动距入口 0.1*R* 处速度分布

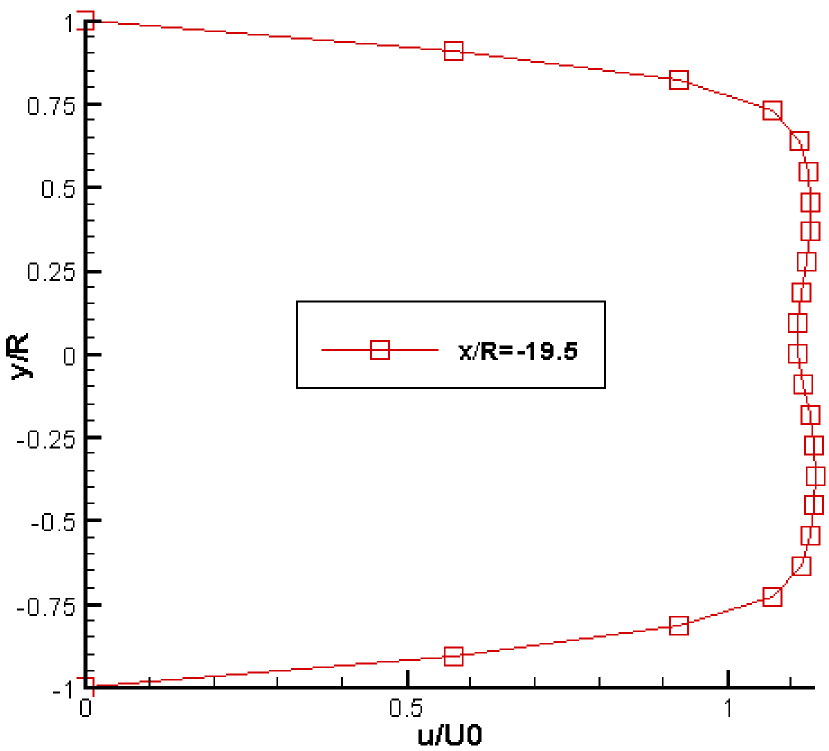


图 2-6-5 二维渠道内流动距入口 0.5*R* 处速度分布

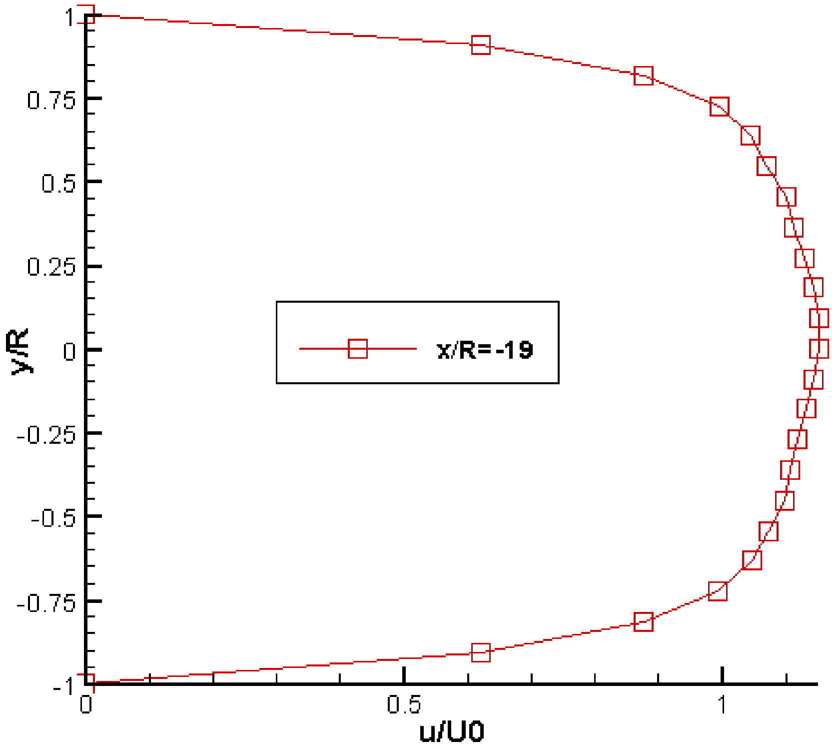


图 2-6-6 二维渠道内流动距入口 *R* 处速度分布

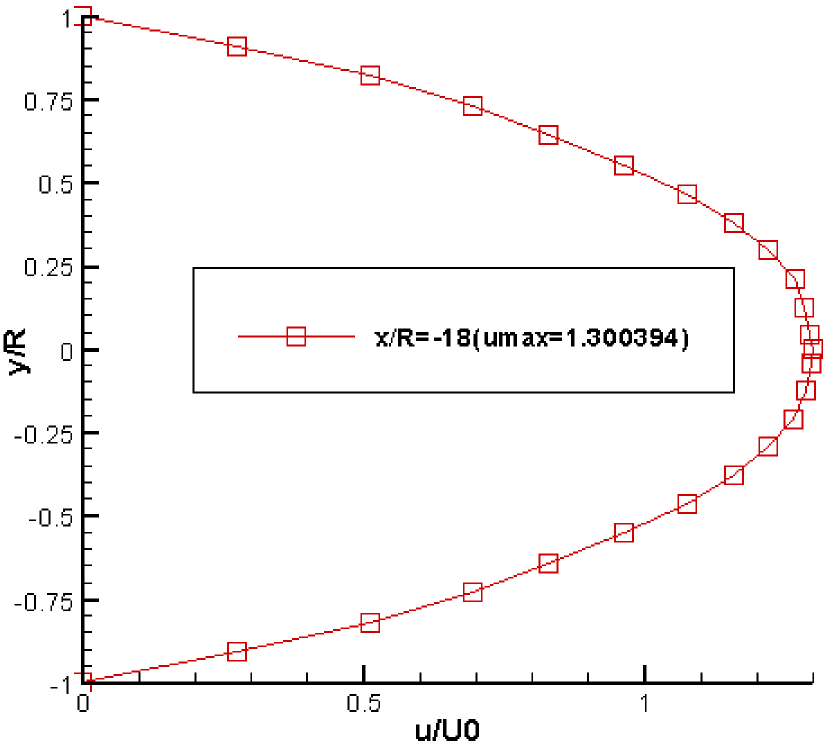


图 2-6-7 二维渠道内流动距入口 2*R* 处速度分布

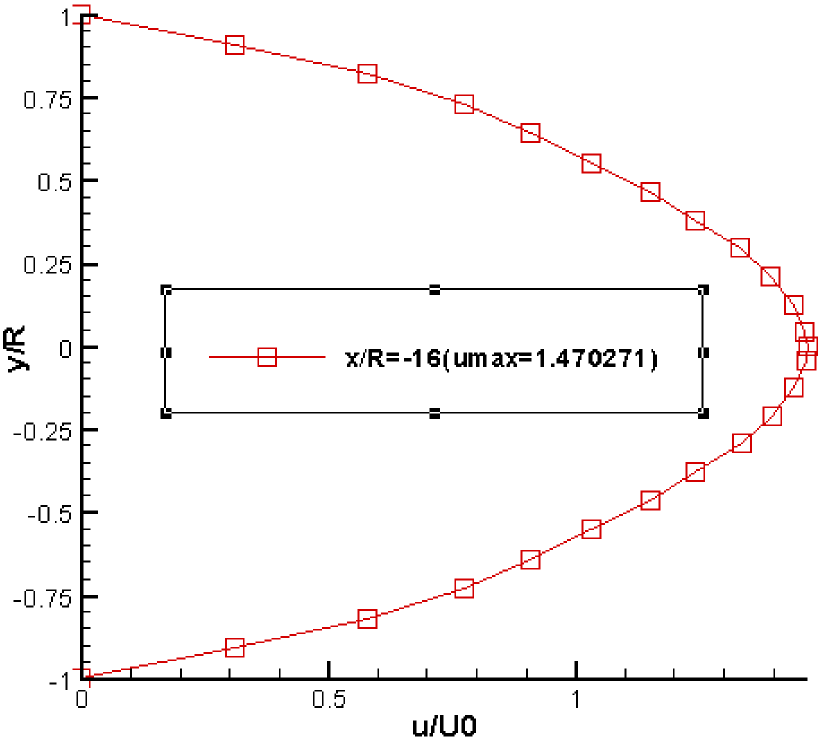


图 2-6-8 二维渠道内流动距入口 4*R* 处速度分布

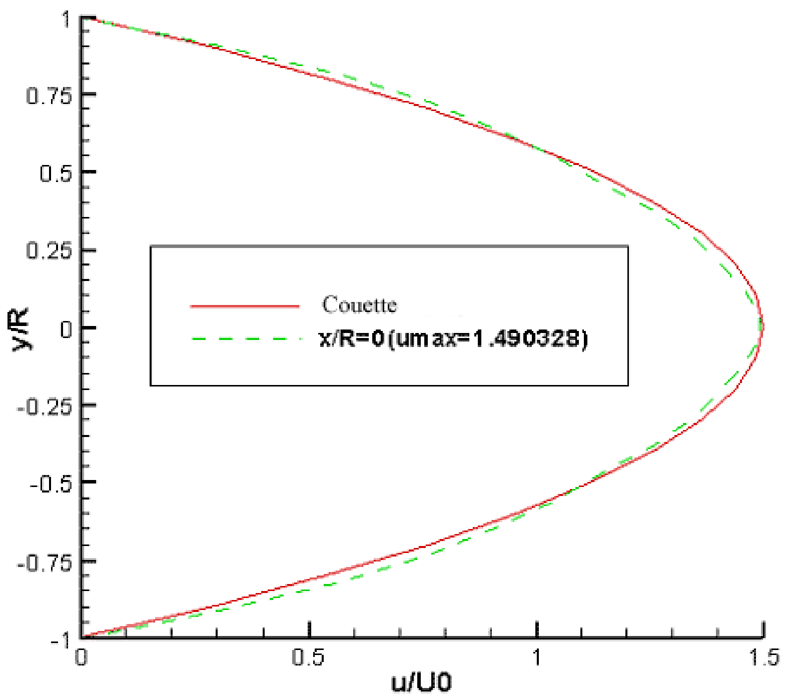


图 2-6-9 二维渠道内流动中心处速度分布及与库塔流比较

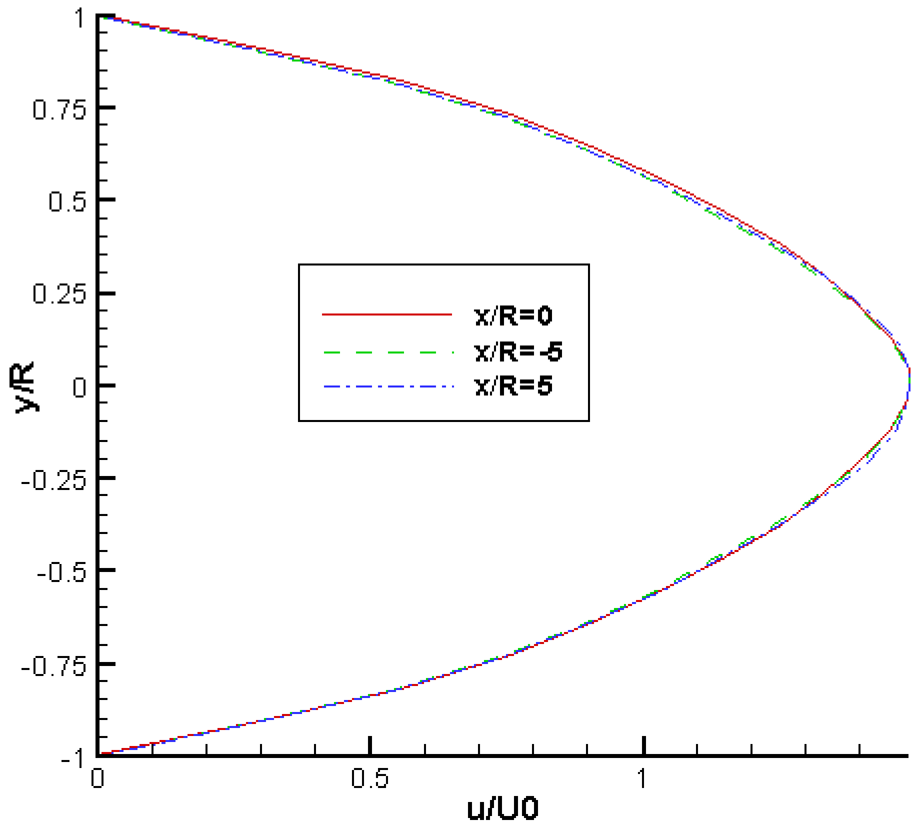


图 2-6-10 二维渠道内流动中心处及距中心±$5R$ 处速度分布比较

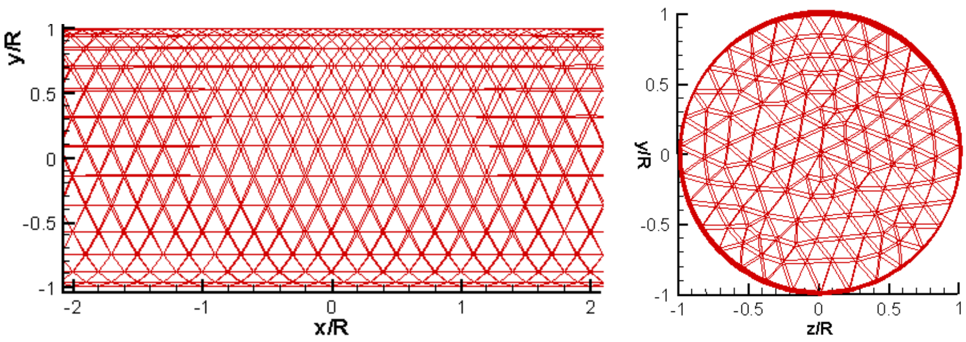


图 2-6-11 有限长圆管内流动表面网格

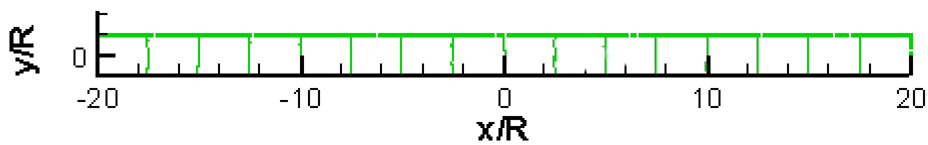


图 2-6-12 圆管内流动等压线分布（z=0）

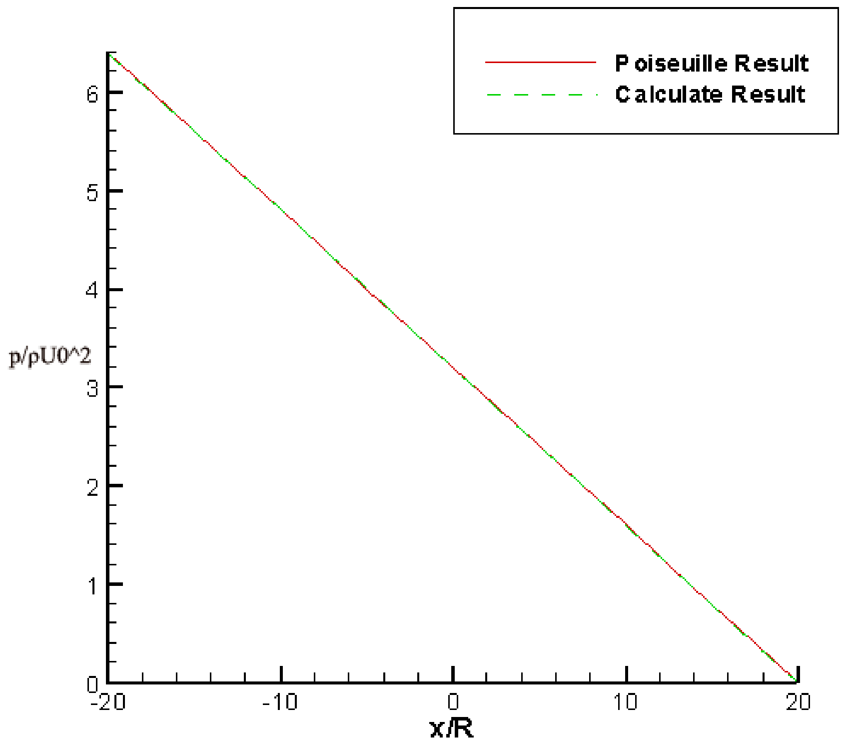


图 2-6-13 圆管内流动压力沿轴向分布及与泊肃叶流的比较

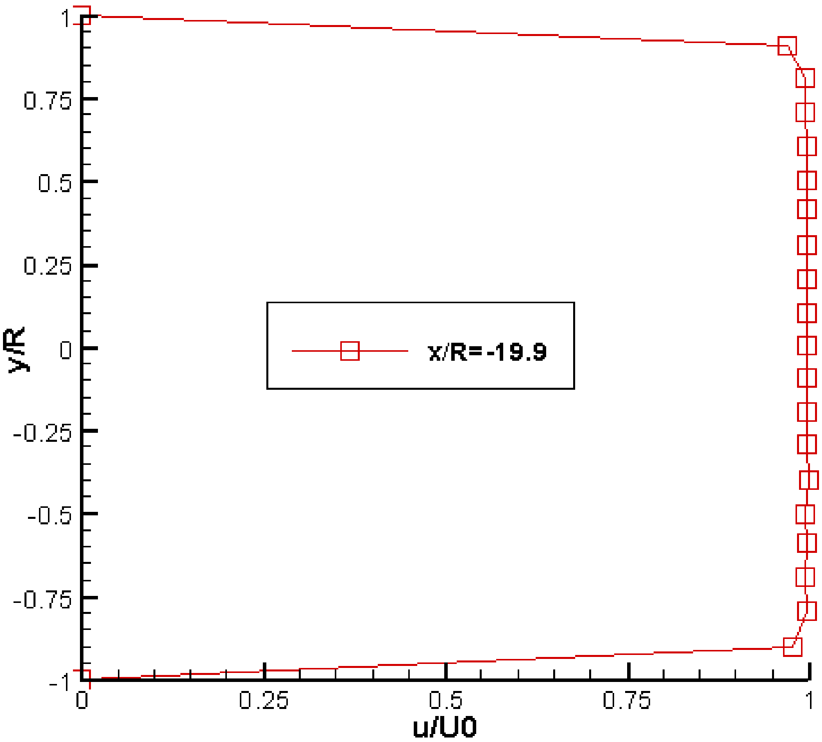


图 2-6-14 圆管内流动距入口 0.1*R* 处速度分布

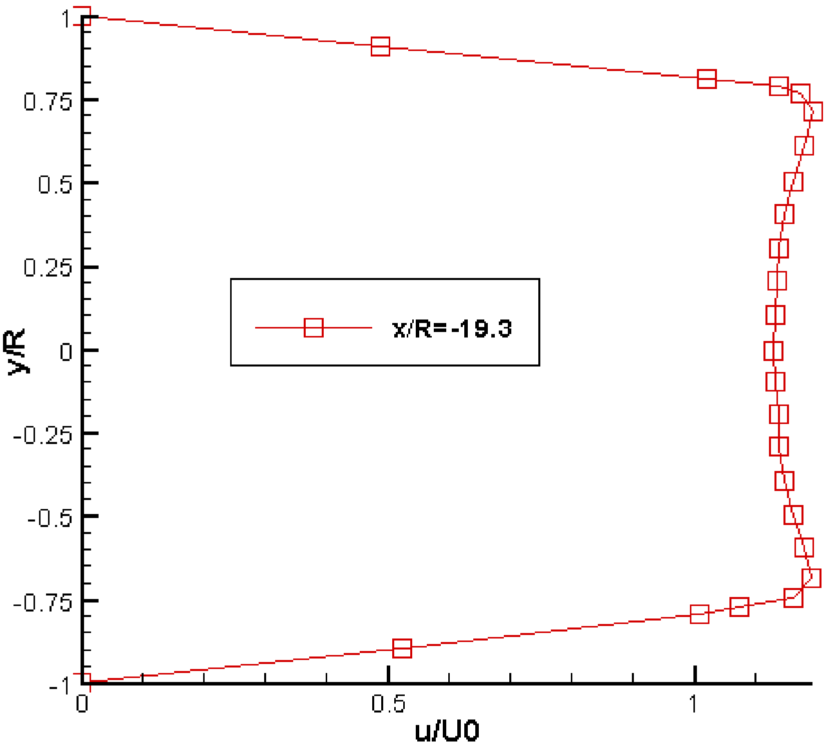


图 2-6-15 圆管内流动距入口 0.7*R* 处速度分布

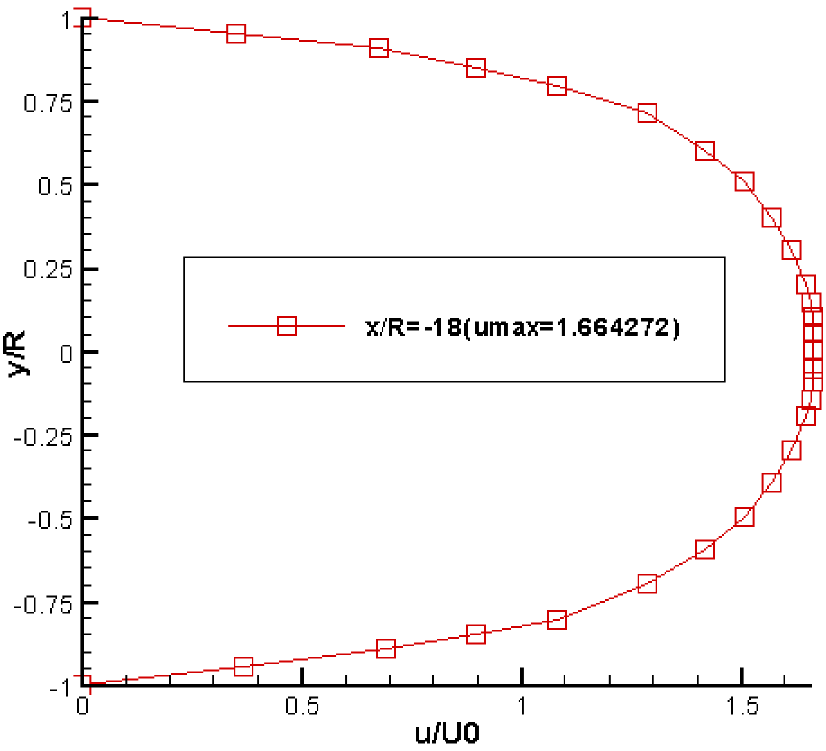


图 2-6-16 圆管内流动距入口 2*R* 处速度分布

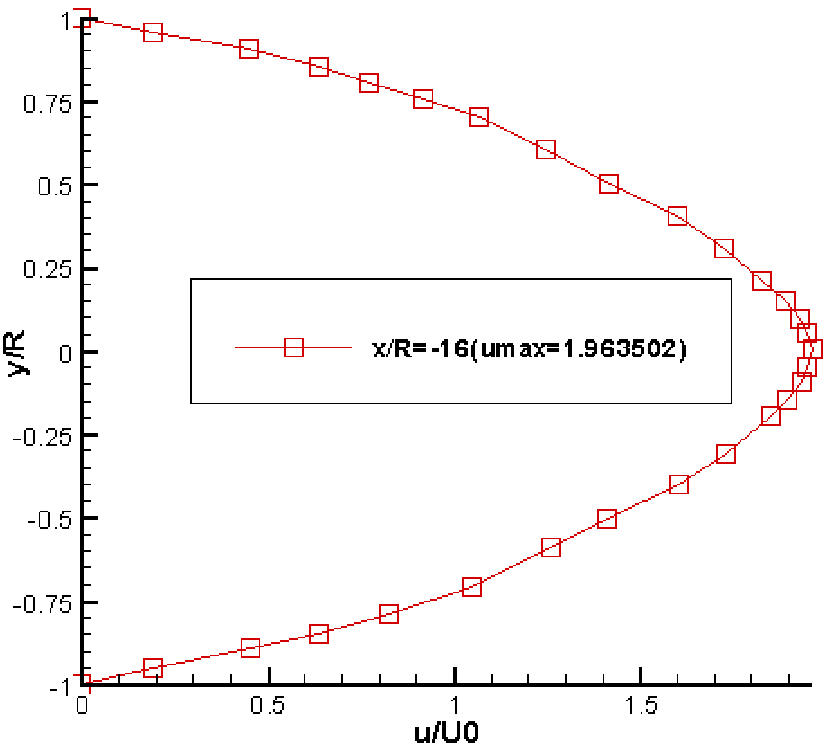


图 2-6-17 圆管内流动距入口 4R 处速度分布

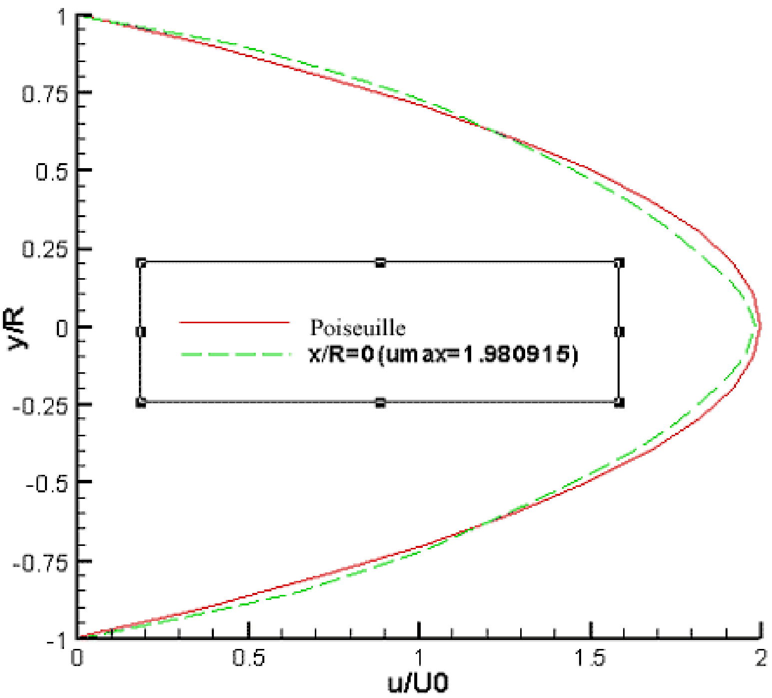


图 2-6-18 圆管内流动中心处速度分布及与泊肃叶流比较

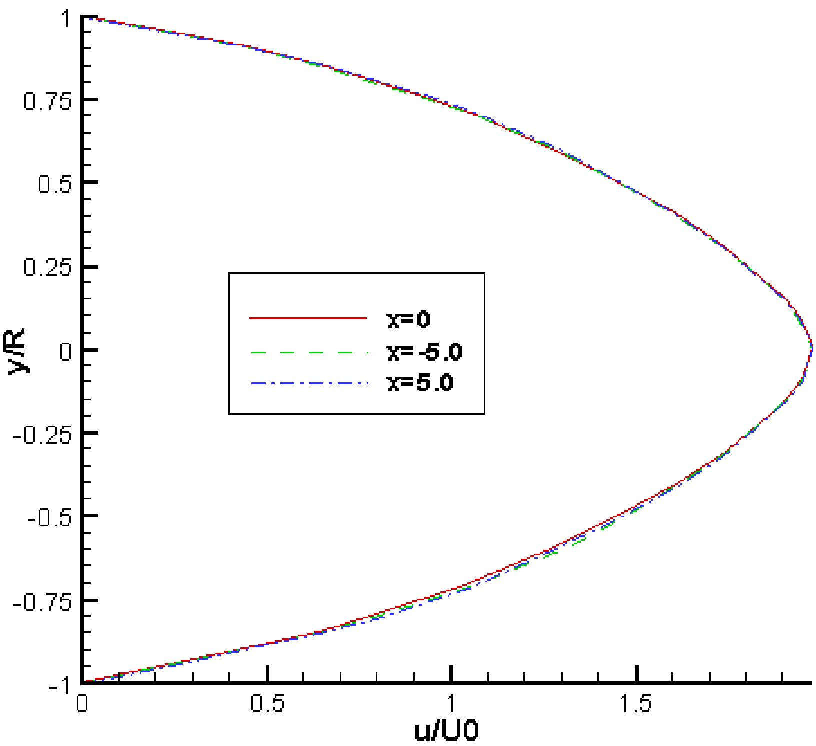


图 2-6-19 圆管内流动中心处及距中心$\pm 5R$处速度分布比较

§ 2.7 应用三角函数基函数法数值模拟动脉瘤内的血液流动

§ 2.7.1 动脉瘤血液动力学研究的主要意义

2.7.1.1 颅内动脉瘤血液动力学研究的生理背景

颅内动脉瘤是一种严重的脑血管病，对人类的生命安全威胁极大，由动脉瘤破裂出血而导致的致死率和致残率都相当高。血液动力学因素在颅内动脉瘤的形成、发展和破裂过程中起着很重要的作用。颅内动脉瘤的血液动力学研究是一个复杂的三维问题，数值模拟是研究这一问题的重要手段之一，由于其形状的复杂性，国内外对此问题的研究大多局限在二维情形，少量的三维情形也只局限于结构网格。

颅内动脉瘤是由于局部血管异常改变产生的脑血管瘤样突起。从解剖学角度来看，这种脑血管病主要发生在 Wills 环前部循环的颈内动脉、大脑前动脉和大脑中动脉，Wills 环后部循环的椎动脉、基底动脉和大脑后动脉，具体部位在动脉分叉处，分支部或转弯部[43]。颅内动脉瘤可以说是潜藏在人体内的一个很大的隐患。临床统计，颅内动脉瘤一旦动脉瘤破裂，在第一次大出血的数天内的死亡率或永久瘫痪率大约为 50%，而且如果不及时治疗，半年内二次发病率也高达 30%-50%，死亡率达 25%-35%[44]。图 2-7-1 是一种常见的颅内囊状动脉瘤的照片[58]。造成动脉瘤形成的病因有多种，遗传，外伤（如颅骨骨折、异物穿入、手术损伤等），细菌或真菌感染以及动脉瘤前期病变：漏斗样改变，局部变薄，微动脉瘤等都能促使动脉瘤形成。

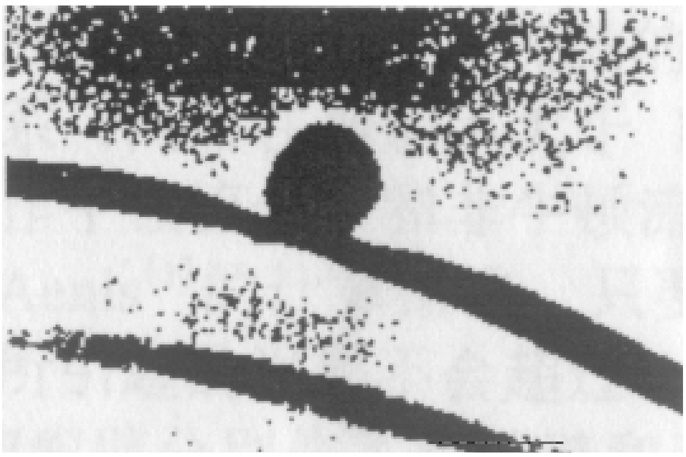


图 2-7-1 颅内动脉瘤照片（直管旁瘤）

以前判断动脉瘤破裂危险性主要看瘤的大小，但后来发现两者并没有直接关系，不少小瘤也容易破裂并引起严重后果。随着对这种脑血管病研究的深入，人们早已意识到血液动力学因素在动脉瘤的形成、发展乃至破裂中扮演着极其重要的角色。目前认为，轴向血流对血管远端的冲击可导致血管内弹力膜的破坏，

形成囊状突起，这种囊状突起又可加重此部位的血流涡流，引起血管壁震荡并促进其变性过程。通过尸检获得的动脉瘤和正常动脉所做的静止性压力容积曲线的研究表明，动脉瘤远较动脉本身缺少扩张性。在一定压力下，动脉瘤必须承受较正常动脉更大的张力，这是因为动脉瘤壁僵硬而薄，体积也较大的缘故。而且由于血压是脉冲性的，动脉瘤壁承受的张力波动很大，这会导致血管壁疲劳，弹力层进一步变性[43]。事实上，血液动力学因素对动脉瘤的影响非常复杂，近几年，国际血栓与止血协会（ISTH）学术与标准化委员会生物流变学分会指出，动脉瘤中的血流应力、压力分布、血流冲击力、流入瘤的流量与血液在瘤内的驻留时间等等都对瘤的破裂有非常重要的影响[45]。这些复杂的因素给颅内动脉瘤的治疗也带来了相应的困难，因此，有必要展开深入的研究，以便为该疾病的治疗方法和治疗时机提供一些更为详细的信息。

2.7.1.2 研究现状

动脉瘤血液动力学的工作最早见于二十世纪三、四十年代。八十年代以来，国内外学者在这方面已做了大量的临床观测、动物实验和体外模拟实验。直到近十年来，计算机和计算科学的飞速发展，使得数值模拟进入了一个崭新的阶段。计算机速度快、花费少、方法灵活等特点，使得数值模拟研究成为了一个很重要的研究手段。1988 年，Perktold[46]等人利用数值模拟的方法研究过二维分叉血管囊状顶瘤的血液动力学问题，他们发现血管和瘤内的血流流动模式主要的影响因素是瘤与载瘤动脉之间的几何关系和血流量：认为低速流速是血液能在瘤内形成血栓的条件之一，而这种血栓形成很可能在动脉瘤的生长和破裂过程中扮演重要角色，他们开始的研究采用了血管壁及瘤壁为刚性、以及流动为牛顿流的假设。在接下来的两年里，Perktold 等人进一步对非牛顿流体进行了数值模拟，结果表明，在生理条件下把血液看成牛顿流体和非牛顿流体相比，两者的差别几乎可以忽略[47]。Aenis[48]的计算指出，只要动脉直径大于 0.5 毫米，则用牛顿流体代替非牛顿流体所引起的误差不会超过 2%。此外，在 Perktold 等人的另一篇血管旁瘤文章里[49]，他们计算出对刚性血管壁和非刚性血管壁两种情形下壁面剪应力的分布，结果发现，两者只在下游（颅内动脉瘤出口）处有较大的区别，而其它地方的差别不大。事实上，动脉瘤远较正常动脉缺少扩张性，颅内动脉较正常的颅外动脉缺少扩张性[50]。所以生理条件下把颅内动脉瘤壁和脑血管瘤壁假设为刚性是比较合理的[51]。体外模拟实验也有相同的结论[52-54]。

Gonzales[55]（1984 年）和 Perktold[49]（1993 年）等人先后研究过二维和三维的弯曲血管旁瘤，得出一些一致的结论，但三维模型下出现的一些复杂的流动现象（如二次流），用二维模型没法模拟。Burleson[56]（1995 年）等人通过一个二维直管旁瘤模型模拟了不同尺寸的半球、球和梨状动脉瘤在不同雷诺数下动脉瘤内的速度

向量、壁面剪切力和压力分布，在他们的计算中，假设流体为定常、牛顿层流、刚性壁。结果说明了动脉瘤的血液动力学参数对瘤和载瘤动脉间几何关系的依赖性、雷诺数的影响，不同形状的动脉瘤最大壁面剪切力并不遵循相同的规律。近年来动脉瘤的研究，也在不同程度上对动脉瘤的治疗起到推动作用。如 1997 年 Aenis[48]在一个三维直管模型内放置支架，研究其放置前后血液流动及相关参数的变化，得到了支架的放置有利于降低瘤内血液流速和保持血管内血液畅通的结果。从理论上证实了小弹簧圈填充疗法的可行性。在国内符策基等人在二维情况下，用有限元法及非结构性网格对直管旁瘤和分叉顶瘤进行了数值模拟[57]，陈伟等人用差分方法及结构性网格数值模拟了三维直管旁瘤[58]。当然，有关这方面的文献还有很多，在这里我们就不一一列举了。

本文采用构造出可数值求解不可压缩二维、三维 N-S 方程的三角函数类型的基函数格式(2-5-12)和(2-4-26)式数值模拟了几种二维和三维动脉瘤的定常血液流动。

动脉瘤的边界条件取：

壁面上　$u=v=0$（三维加 $w=0$）

入口处　$p=P_0$，$u=U_0$　$v=0$　（三维加 $w=0$）

出口处　$p=0$，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, \dfrac{\partial v}{\partial x}=0$　（三维加 $\dfrac{\partial w}{\partial x}=0$）

其中 P_0=9.0kP a（实测[60]）。

§ 2.7.2 动脉瘤血液动力学计算结果及分析

算例的参数均按照实测血液的相关参数来选取[60]。如血液的粘性系数 $\mu=0.0035 Pa\cdot s$，血液密度 $\rho=1000 kg\cdot m^{-3}$。血管半径 R=0.002m，血管长度 L=40R，这样入口出口与血管中心距离较远，使得它们的影响可以忽略。

2.7.2.1　二维动脉瘤

这里我们计算了三种动脉瘤模型：大半圆模型 1-1，半圆模型 1-2 和小半圆模型 1-3，它们具有不同的瘤口宽度、瘤半径和瘤深。分析了在不同雷诺数下的流场及壁面剪切力沿瘤壁面分布情况，并讨论雷诺数、动脉瘤-载瘤动脉之间的几何关系对动脉瘤血液动力学参数的影响。这三种动脉瘤模型的几何尺寸见表 2-1，具体形状及网格剖分见图 2-7-2~2-7-4。此算例中取 β=4。

表 2-1 三种二维动脉瘤的几何尺寸（载瘤血管半径为 R）

模型	动脉瘤形状	瘤口宽度	瘤半径	瘤深
1-1	大半圆	2R	2R	3.732R
1-2	半圆	2R	R	R

1-3	小半圆	1.732R	R	0.5R

模型 1-1 的几何尺寸选自文献[56]，本文分别取了 Re=100、400 和 700 来计算动脉瘤内的速度场及壁面剪切力沿瘤表面的分布。根据雷诺数定义 $\mathrm{Re}=\dfrac{\rho U_0 R}{\mu}$，计算出每种雷诺数下的平均速度$U_0$。其中计算区域的线性尺度、速度和压力分别按 R、平均速度 U_0 和 $\rho U_0{}^2$ 归一化。由于文献[56]中并未给出初始压差，本文根据文献[60]作者实测的数据取初始时刻血管入口压力为肱动脉压 P_0=9.0kPa，出口压力则取 0。

图 2-7-5~2-7-7 分别是模型 1-1 在 Re=100、Re=400 和 Re=700 时瘤壁剪切力沿瘤表面从近端到远端的变化曲线。从图中可以看出，对于不同雷诺数，动脉瘤壁面剪切力的变化趋势基本相同，在近端和远端的剪切力较大，而瘤体内的剪切力相对较小，最大剪切力则出现在瘤的远端。同时，还可以看到，随着雷诺数的增加，最大剪切力也相应增加，因此在其它条件不变的情况下，雷诺数越大，最大剪切力也越大，瘤越容易破裂。

接着，我们来分析模型 1-1 中 Re=400 时动脉瘤附近的流场分布，本文的计算结果如图 2-7-8 所示，为了比较，同时给出文献[56]的流场情况，如图 2-7-9。其中线段的长短代表速度矢量的大小，箭头代表速度矢量方向。可以看出，两个流场非常相似，血管中的血液流入瘤内，在瘤内中心略靠下的位置形成一个大的逆时针旋涡，然后重新流回血管中。正是这种流动使动脉瘤壁受到剪切力的作用，在血管中血液流速较大，进入动脉瘤后流速明显减少，在瘤内则相对变化不大，因此在瘤近端和远端，剪切力都较大。

为了考察不同动脉瘤半径、瘤深及瘤颈的开口宽度这些几何尺寸对动脉瘤血液动力学诸参数的影响，本文还计算了如表 2-1 所描述的模型 1-2 和模型 1-3，取 Re=400。图 2-7-10 和 2-7-12 分别给出了模型 1-2 的瘤附近流场分布及剪切力沿瘤表面变化曲线，图 2-7-11 和 2-7-14 则给出模型 1-3 的流场分布及剪切力沿瘤表面变化曲线。

从图 2-7-10 和图 2-7-11 可以看出，当瘤半径较小位置较浅时，瘤内旋涡的范围较相同雷诺数下的模型 1-1 明显减少，但总的流动规律均类似。

相同雷诺数下三种模型的剪切力沿瘤弧长的分布趋势大体相同，都是在动脉瘤近端和远端剪切力较大，最大剪切力发生在瘤远端，瘤内部剪切力相对较小。另外，动脉瘤越深、瘤半径越大，最大剪切力就越大，动脉瘤也越容易破裂。文献[56]中给出了模型 1-2 的壁面剪切力沿血管轴向的变化曲线，如图 2-7-13，可以看出，Re=400 时的曲线的变化趋势及近端远端的剪切力值与我们

计算出的结果（图 2-7-12）非常接近。由于文[56]中没有给出入口和出口处压力值，因此这里的比较不是完全准确的（外形、雷诺数相同，但出入口处压力值可能不同）。

2.7.2.2 三维动脉瘤

由于三维情况下，动脉瘤的流动情况要比二维时要复杂很多，因此本文只讨论了 Re=400 时的两种不同几何参数的动脉瘤模型，计算出流场及剪切力、压力沿瘤壁面分布情况，并讨论了动脉瘤几何形状对其血液动力学参数的影响。这两种动脉瘤模型的几何尺寸见表 2-2（分别为模型 2-1 和模型 2-2），具体形状及表面网格见图 2-7-15 和 2-7-16 。此算例中取 β=10。

表 2-2 两种三维动脉瘤的几何尺寸（载瘤血管半径为 R）

模型	动脉瘤形状	瘤口宽度	瘤半径	瘤深
2-1	半球冠	$2R$	R	R
2-2	小半球冠	$1.6R$	R	$0.4R$

图 2-7-17~2-7-22 是模型 2-1 和模型 2-2 在对称面 z=0 上的流场及壁面剪切力、压力随瘤表面的变化曲线。如图 2-7-17 和图 2-7-18 所示，模型 2-1 和 2-2 在动脉瘤内并未形成旋涡结构，而是沿着血管壁从瘤近端顺着血流的方向流入动脉瘤，并沿着瘤壁方向从瘤远端流出动脉瘤，流态与二维情况下相比有较大不同。这是由涡旋的运动学性质决定的，涡管不能在流体中产生或消失[61]，因此它只能在流体中自行封闭，形成涡环，或将其头尾搭在固壁或自由面上，或延伸至无穷远处。二维动脉瘤可以看作在 z 方向是延伸至无穷远的，因此满足形成涡旋的条件，而三维动脉瘤是个有限区域，又不大可能自行封闭形成涡环，故没有涡旋的生成应该是合理的。

图 2-7-19 和 2-7-20 分别是模型 2-1 和 2-2 在对称面上瘤壁剪切力随瘤弧长的变化曲线。我们可以看出，曲线总的变化趋势类似于二维情形，都是在瘤近端和远端的剪切力较高，最大剪切力发生在瘤远端，瘤内部剪切力较低，而且动脉瘤越深，最大剪切力越大。然而，与二维相比，三维情况下剪切力曲线变化的比较平缓，不象二维有比较尖锐的拐点，尤其是模型 2-2，剪切力曲线圆滑，有点类似二次曲线。这可能是因为三维动脉瘤内没有形成旋涡，剪切力变化相对二维较平缓。

图 2-7-21 和 2-7-22 分别显示了模型 2-1 和 2-2 在对称面上瘤壁压力随瘤弧长的变化情况，总的来说，从瘤近端到远端压力都呈上升趋势，最大压力在瘤远端附近取得。

§ 2.7.3 结论

通过上面对二维、三维动脉瘤计算的分析中我们可以得到以下几点结论：

1. 在我们计算的算例中，动脉瘤壁面的最大剪切力都发生在瘤远端；
2. 相同的几何参数情况下，动脉瘤的最大剪切力会受雷诺数影响，一般来说，雷诺数越高，最大剪切力越大，动脉瘤也越容易破裂；
3. 若雷诺数不变（如 Re=400），无论是三维还是二维动脉瘤，其血液动力学参数如流场、瘤壁剪切力等都会依赖于动脉瘤与血管之间的几何尺寸：
   （1） 在二维动脉瘤中，瘤半径越大、瘤越深则涡旋的范围越大、最大剪切力也越大，瘤越容易破裂；
   （2） 三维动脉瘤的流场中并没有形成涡旋，其瘤壁上的最大剪切力也随着动脉瘤的加深而有显著增加；
4. 三维动脉瘤壁面的最大压力和最大剪切力一样发生在瘤远端附近，因此，瘤远端应该是动脉瘤生长和发生破裂的危险区，在文献[56], [57]中也得到过类似的结论。

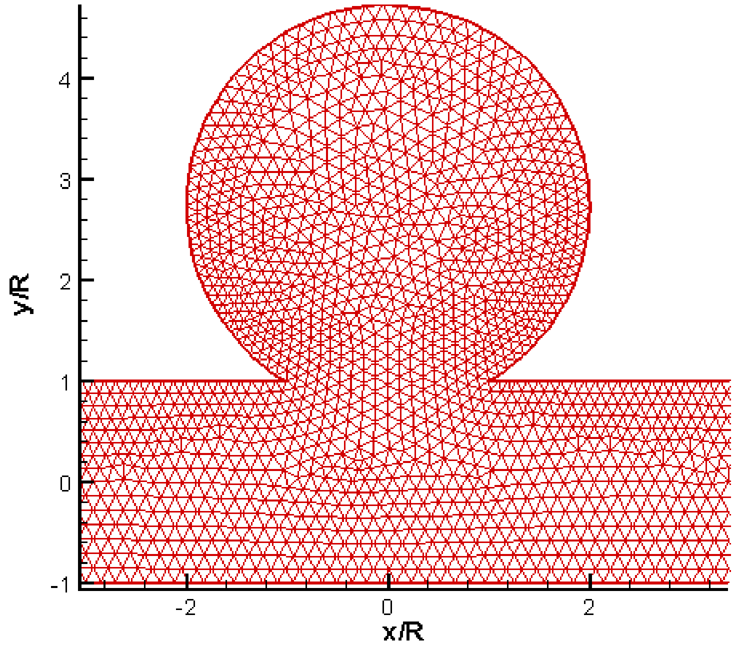


图 2-7-2 二维动脉瘤模型 1-1 网格

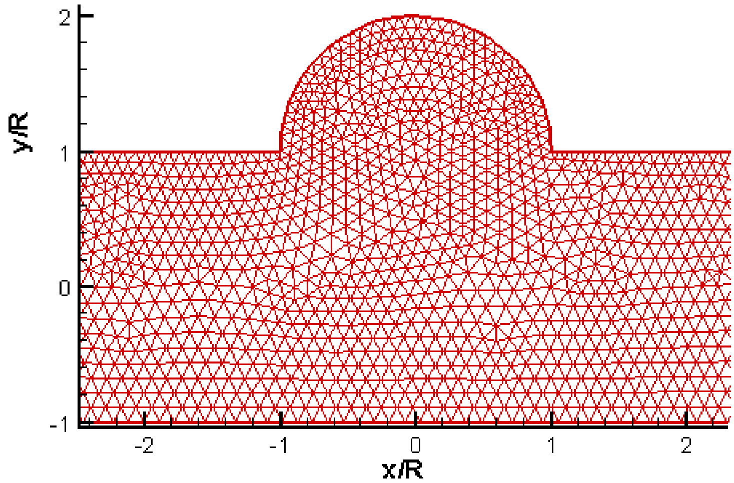


图 2-7-3 二维动脉瘤模型 1-2 网格

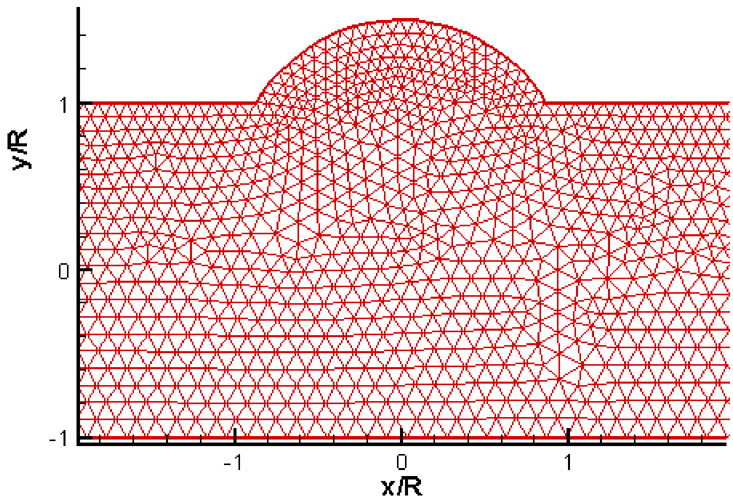


图 2-7-4 二维动脉瘤模型 1-3 网格

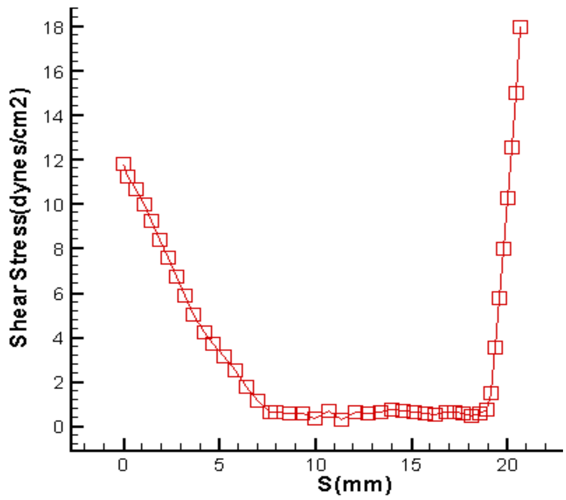


图 2-7-5 壁面剪切力随瘤弧长的变化曲线（模型 1-1，Re=100）

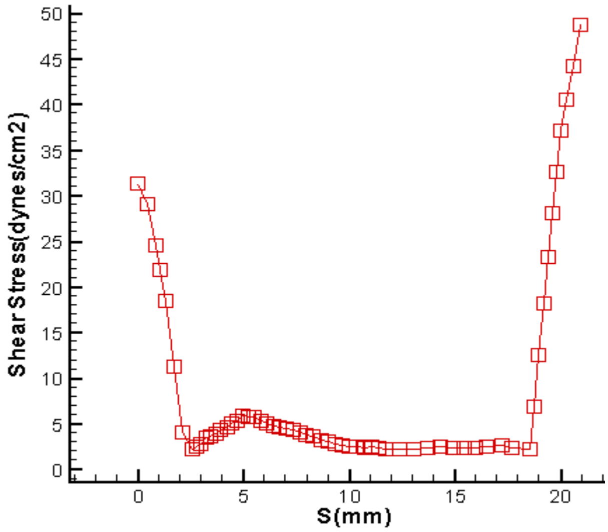


图 2-7-6 壁面剪切力随瘤弧长的变化曲线（模型 1-1，Re=400）

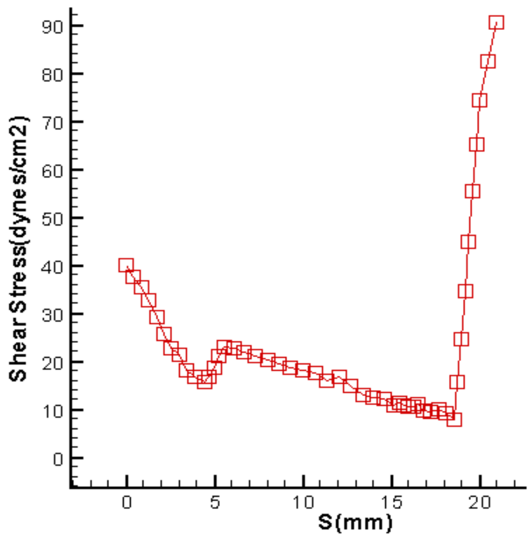


图 2-7-7 壁面剪切力随瘤弧长的变化曲线（模型 1-1，Re=700）

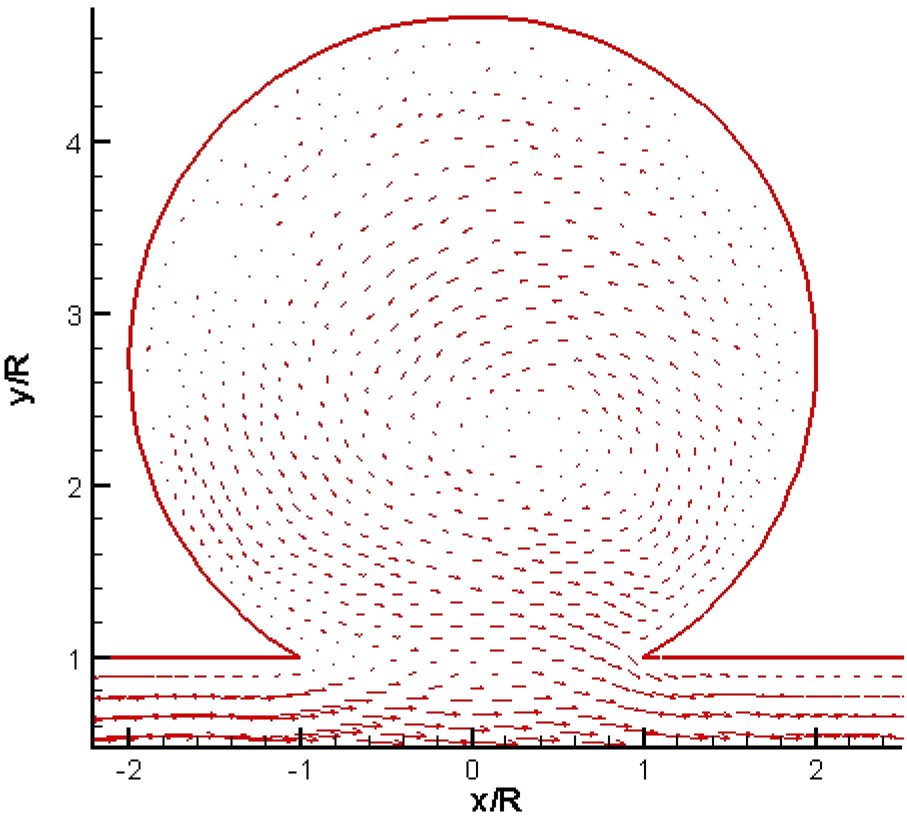


图 2-7-8 动脉瘤附近的流场分布（模型 1-1，Re=400）

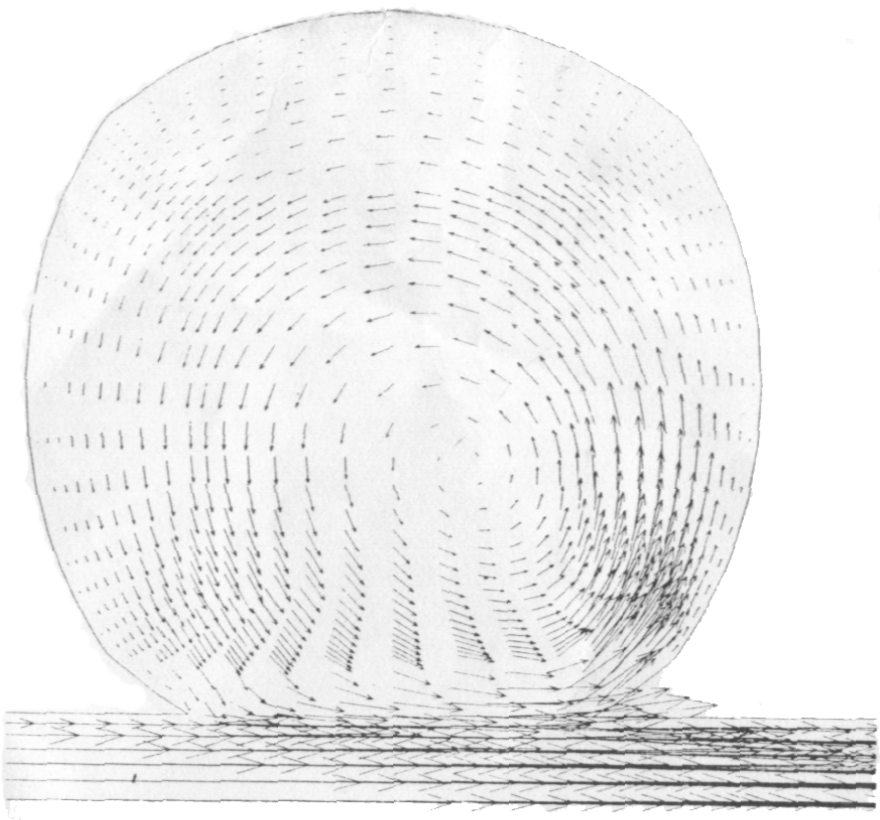


图 2-7-9 文献[56]计算的流场分布（模型 1-1，Re=400）

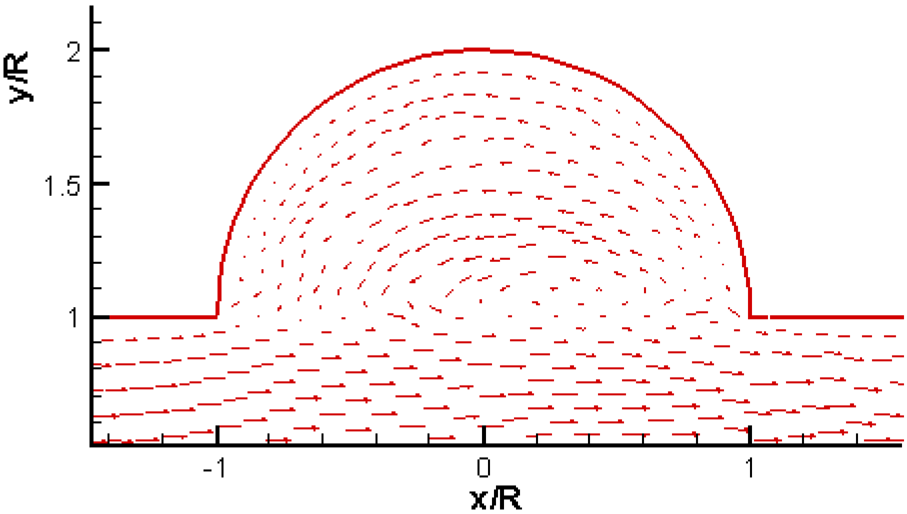


图 2-7-10 动脉瘤附近的流场分布（模型 1-2，Re=400）

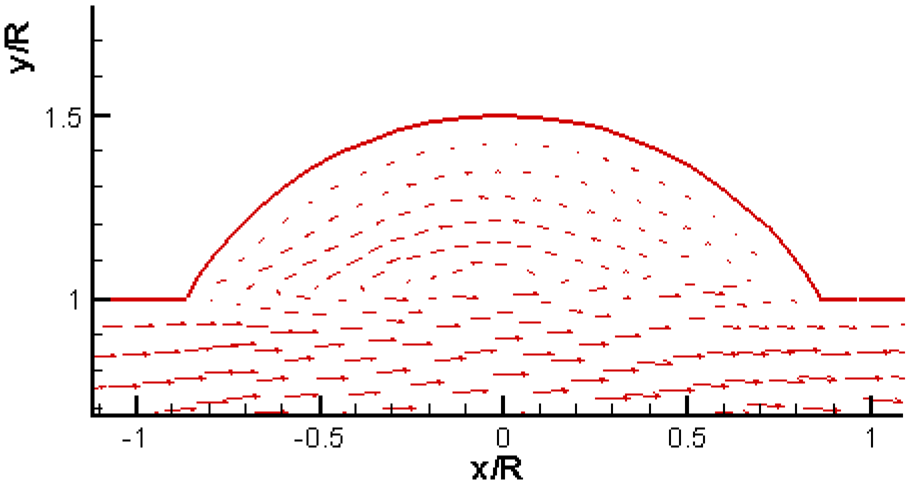


图 2-7-11 动脉瘤附近的流场分布（模型 1-3，Re=400）

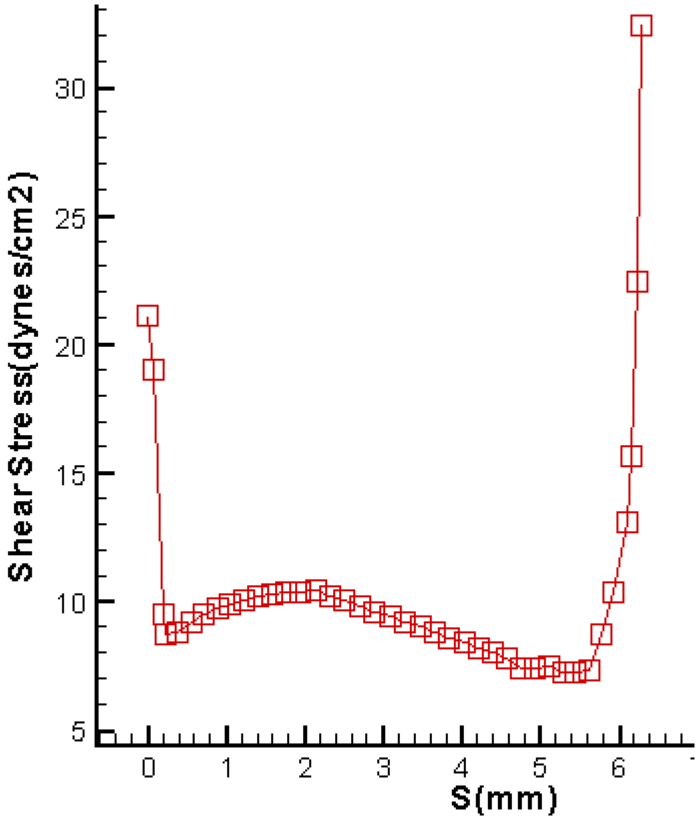


图 2-7-12 壁面剪切力随瘤弧长的变化曲线（模型 1-2，Re=400）

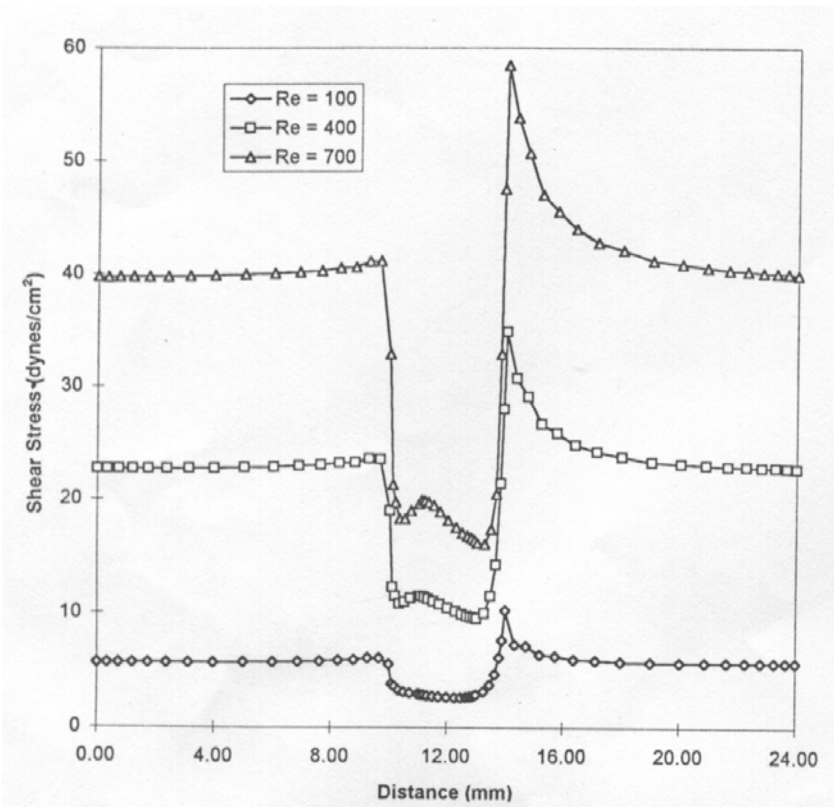


图 2-7-13 文献[56]中壁面剪切力沿 x 轴的变化曲线（模型 1-2）

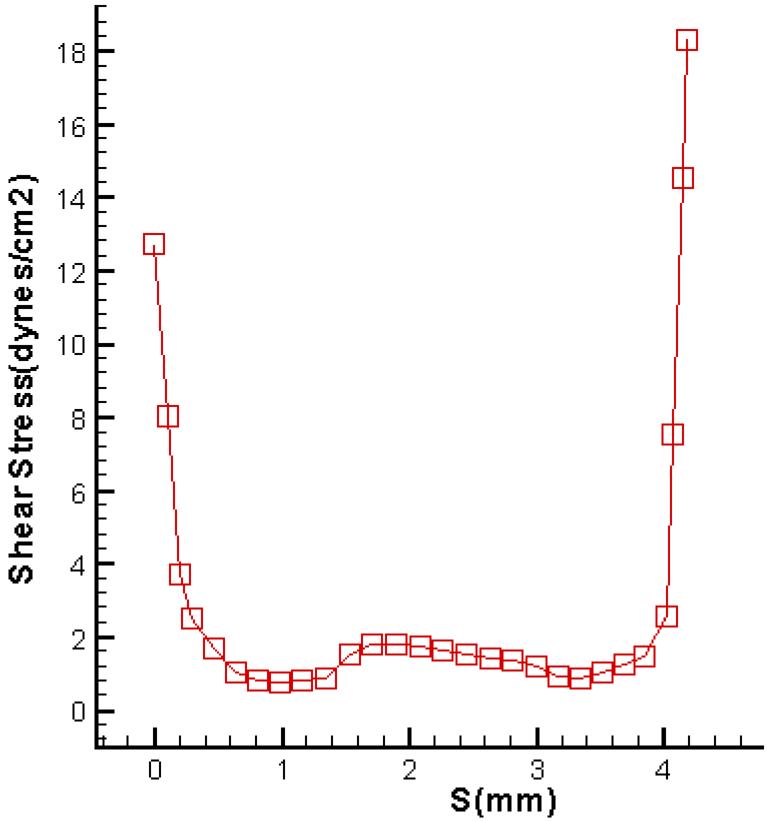


图 2-7-14 壁面剪切力随瘤弧长的变化曲线（模型 1-3，Re=400）

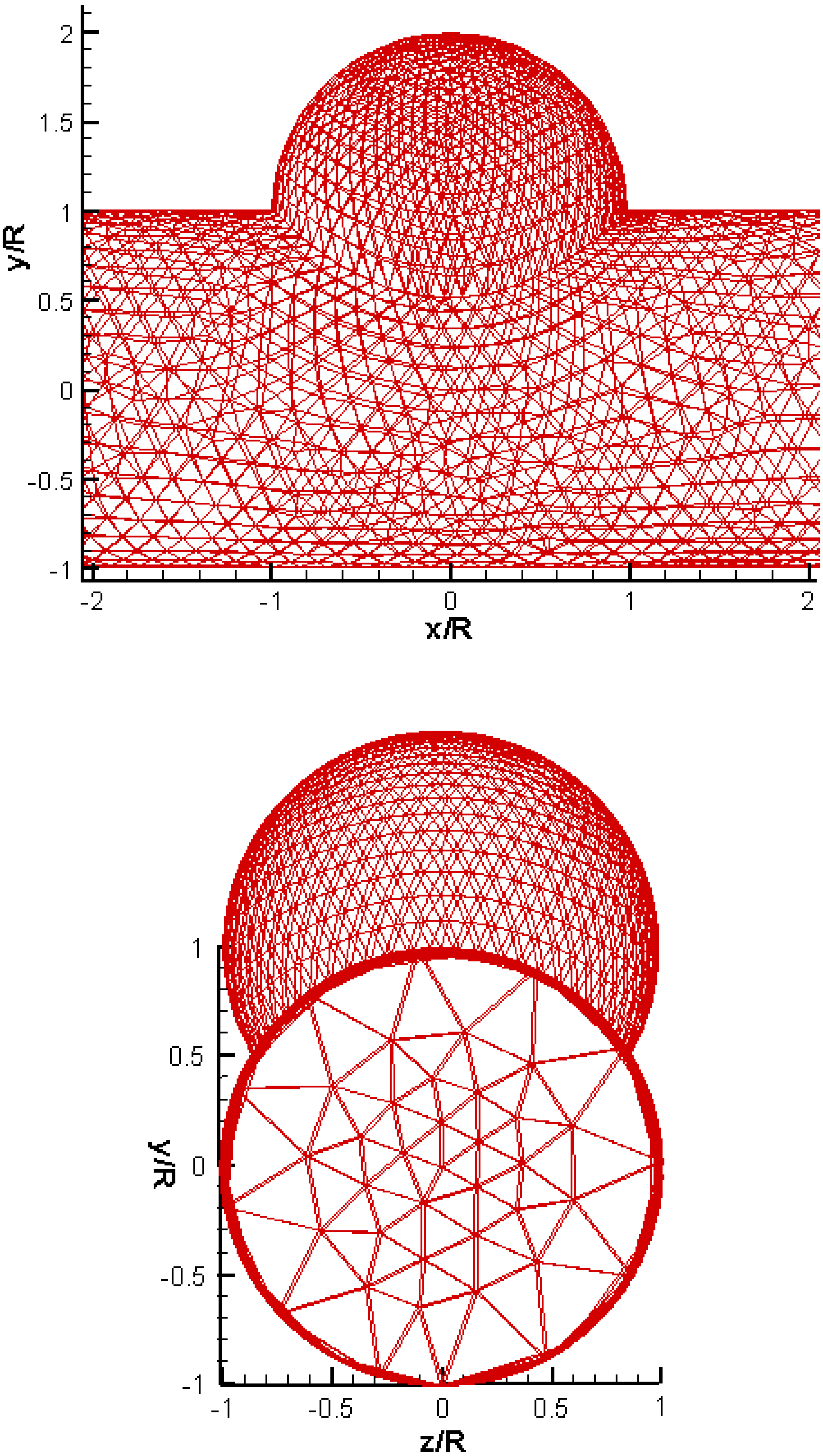


图 2-7-15 三维动脉瘤模型 2-1 表面网格

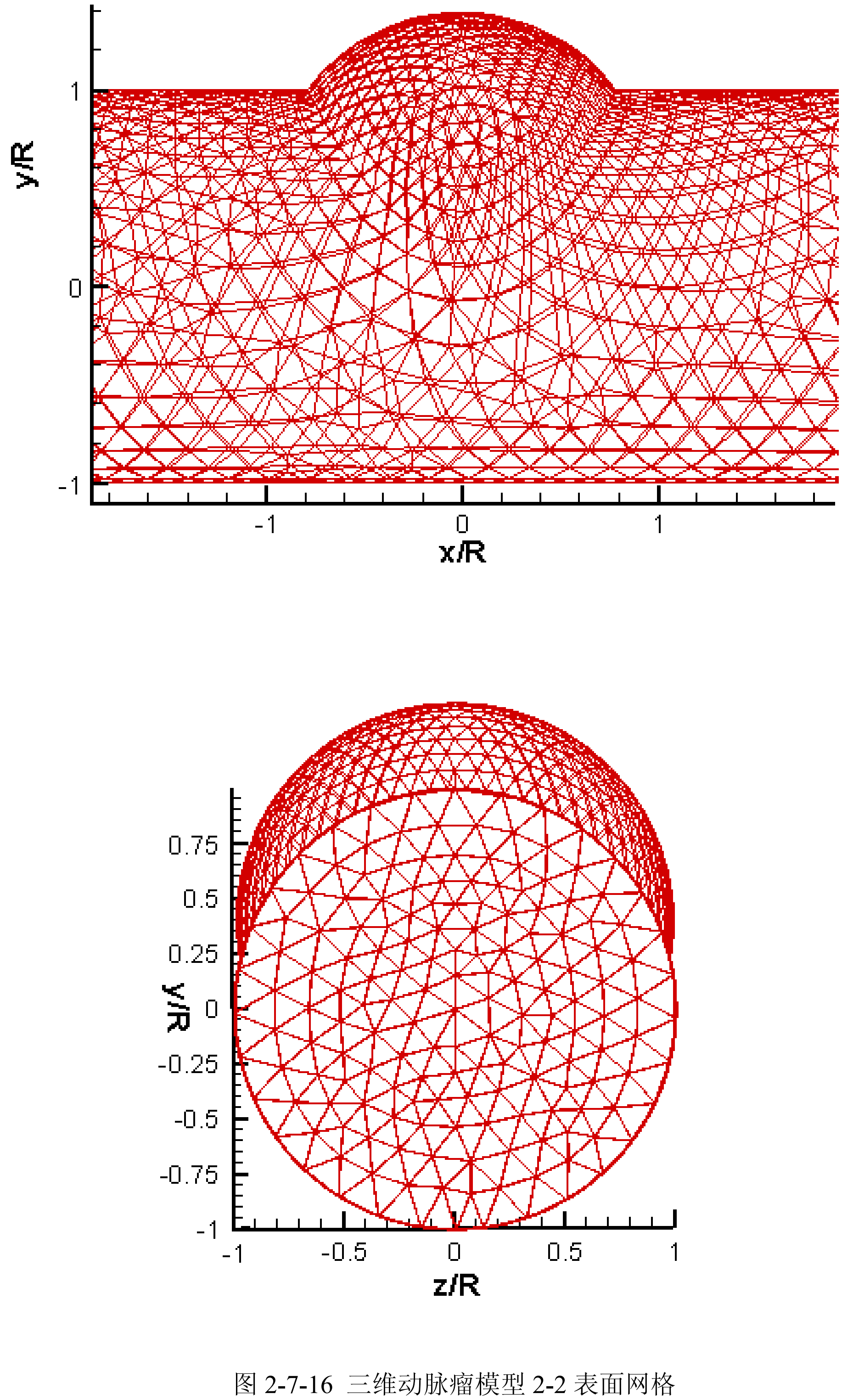


图 2-7-16 三维动脉瘤模型 2-2 表面网格

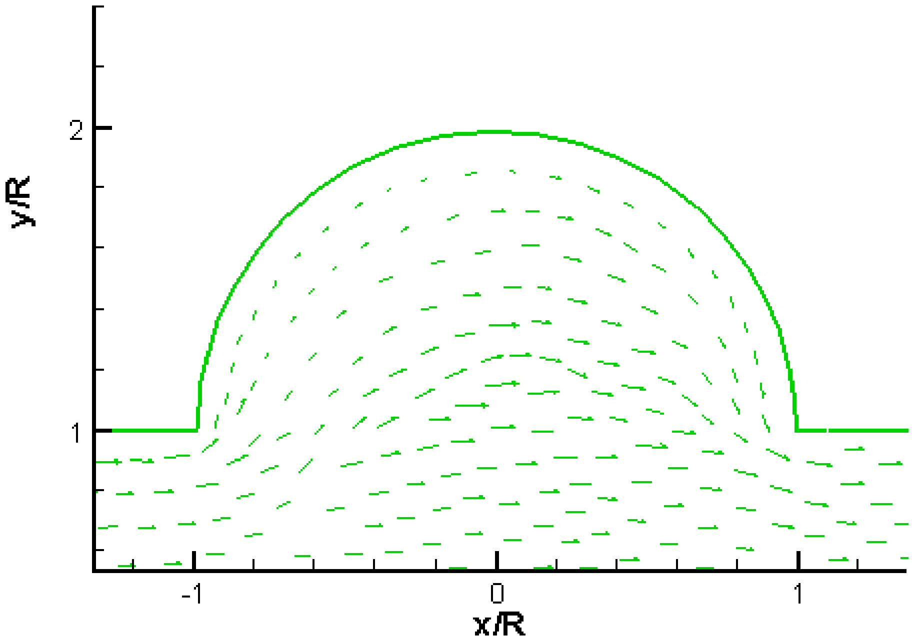


图 2-7-17 三维动脉瘤对称面上的流场分布（模型 2-1，Re=400）

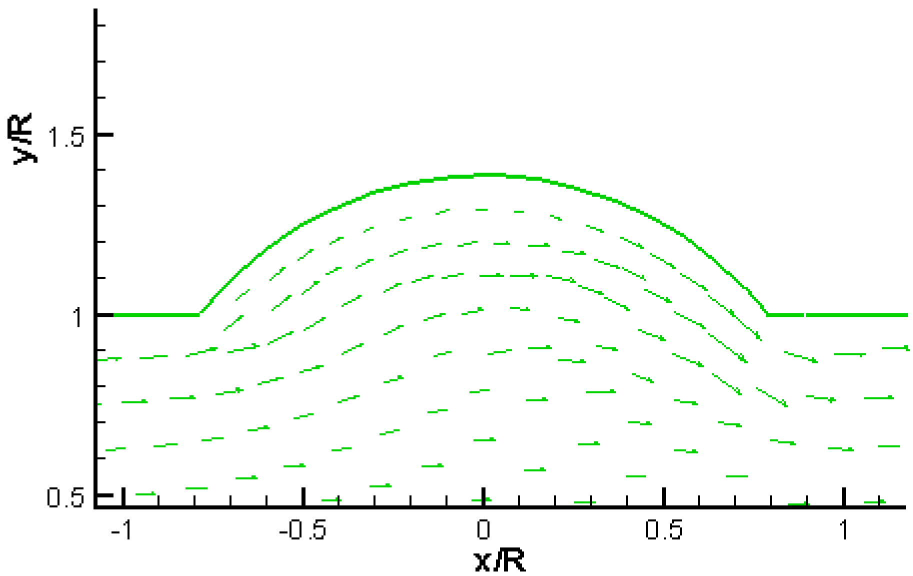


图 2-7-18 三维动脉瘤对称面上的流场分布（模型 2-2，Re=400）

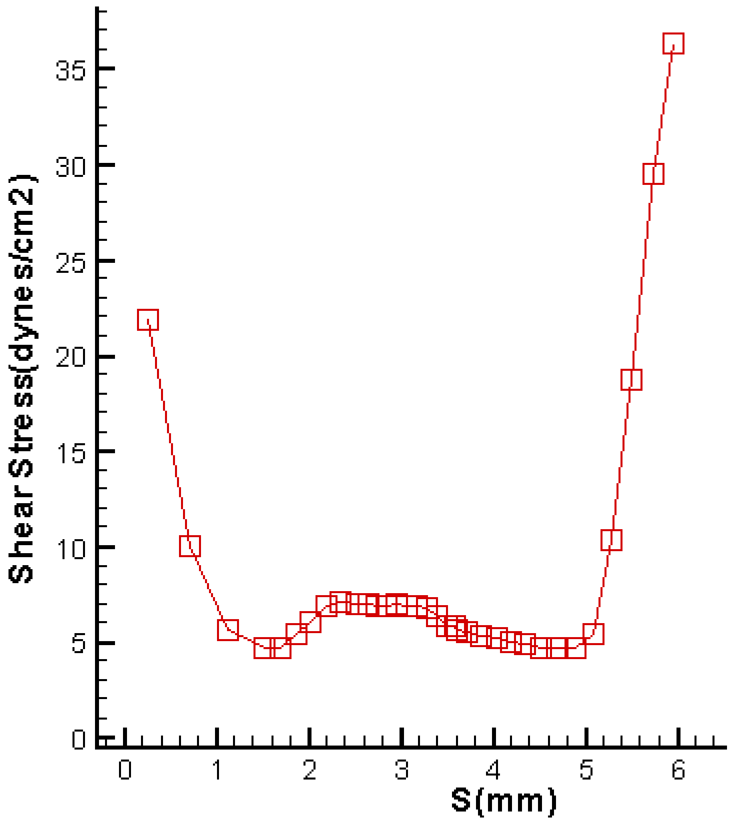


图 2-7-19 三维动脉瘤对称面上壁面剪切力随瘤弧长的变化曲线（模型 2-1，Re=400）

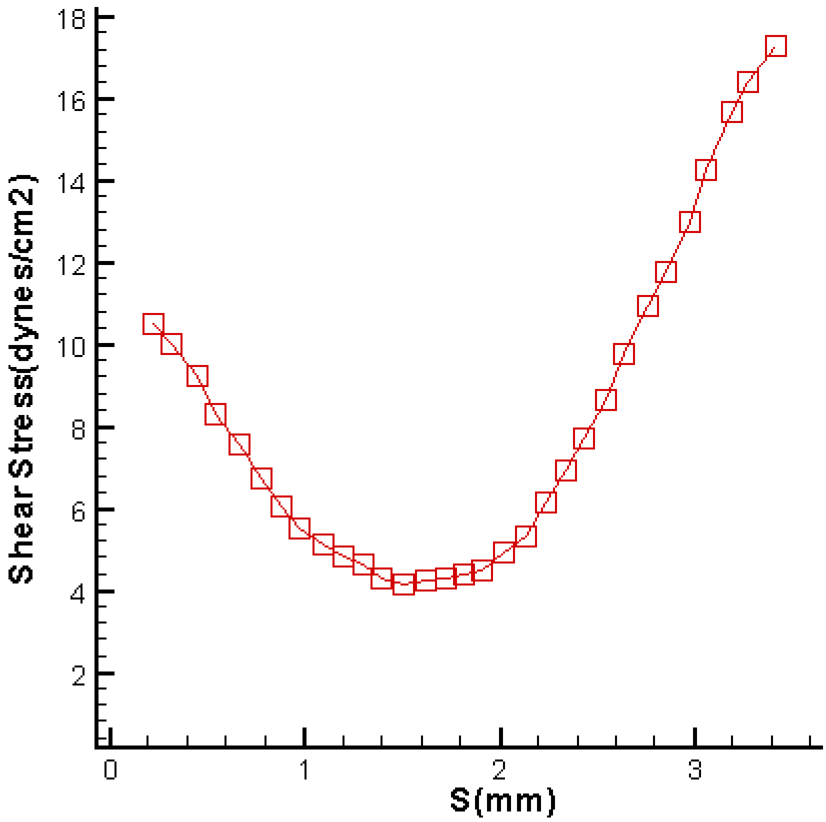


图 2-7-20 三维动脉瘤对称面上壁面剪切力随瘤弧长的变化曲线（模型 2-2，Re=400）

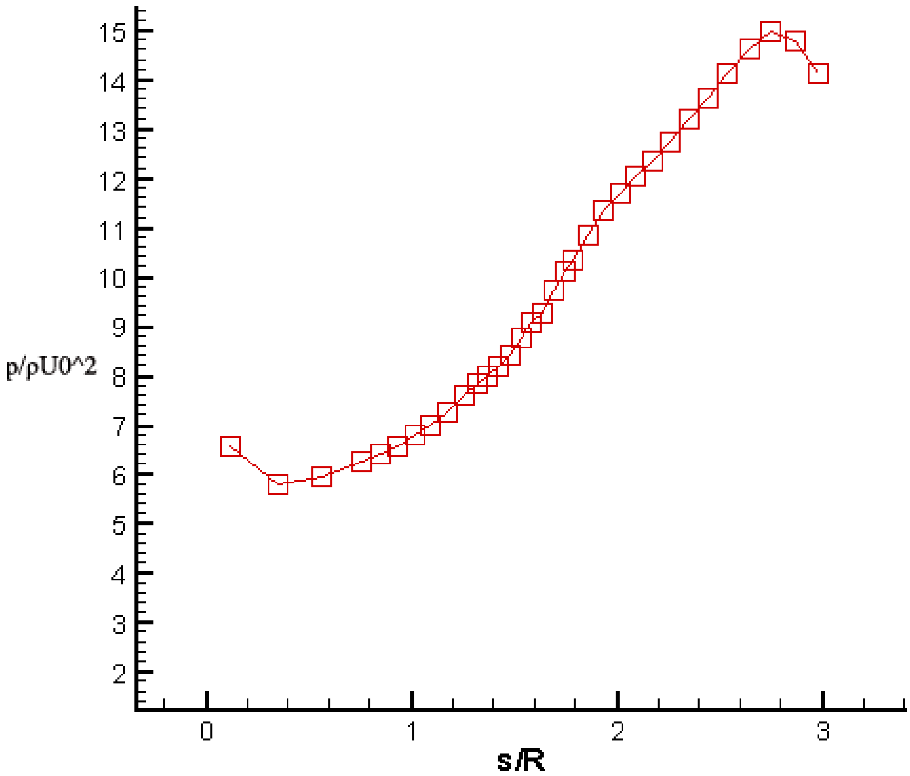


图 2-7-21 三维动脉瘤对称面上壁面压力随瘤弧长的变化曲线（模型 2-1，Re=400）

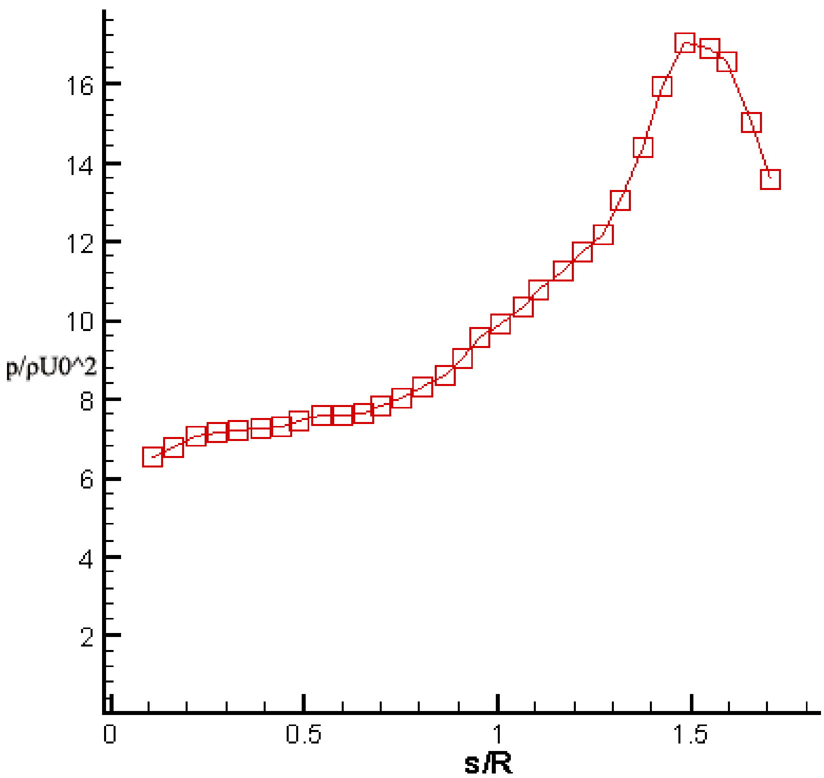


图 2-7-22 三维动脉瘤对称面上壁面压力随瘤弧长的变化曲线（模型 2-2，Re=400）

第三章 总结、创新点及进一步的工作

§ 3.1 总结

基函数法是一种新型的计算方法，此方法直接在非结构网格中离散微分算子。由于基函数法是在非结构网格上构造的，因而它能方便地处理复杂边界，保持边界点和内点格式的一致，而且它可以直接处理多维问题，并采用自适用技术改进计算的精度。在生成二维或三维非结构网格后，在网格单元上采用基函数展开逼近真实函数，可以构造出在非结构网格上的各阶导数各阶精度的中心格式和迎风格式。基函数可取任意正交完备函数族，常用的如多项式基函数、三角函数基函数等等。在文献[9]、[11]、[12]中提出了基函数法的基本理论并采用多项式或三角函数作为基函数，构造出基函数格式并数值地计算了无粘可压缩流动的一、二、三维多种典型算例，并取得了精度和分辨率都十分满意的结果。

本文则在此基础上将基函数法拓宽到不可压缩粘性流动的数值模拟中去。我们采用人工压缩性技术，构造出处理粘性不可压缩流动的新型数值方法——三角函数基函数法。

采用三角函数作为基函数具有很好的性质，通过上述大量算例的计算结果可以看出它的精度和分辨率都很高。而且，在处理粘性不可压缩的 N-S 方程等具有高阶导数的微分方程时，选取三角函数为基函数要明显优于选取多项式为基函数，例如考虑一阶三角函数基函数法，用它既可以计算一阶对流项，也可以计算二阶粘性项，其精度均为一阶，因为三角函数可以无限次的求导并保持同一精度；但多项式就不具备这方面的优点，如果选取一阶多项式为基函数，那么用它只能计算一阶对流项，而在计算粘性项时，则因结果为零而失效，必须求助于二阶多项式。

本文重点研究了一阶精度的三角函数基函数格式，与高阶精度的基函数格式相比，一阶精度基函数格式公式最简单、涉及的单元节点个数最少，从而显著节省了计算时间及内存。实践表明，本文采用一阶三角函数基函数法与非结构网格在处理二维、三维粘性不可压缩流体时，不仅显著节约了计算时间和内存，而且取得了精度及分辨率都不错的结果。

我们首先在二维、三维问题中，分别采用面积坐标和体积坐标，成功构造出

三角函数类型一阶精度的基函数和各阶导数的中心格式和迎风格式，然后引入人工压缩性系数并采用通量分裂法及中心格式和迎风格式相结合的技术，构造出可数值求解不可压缩二维、三维 N-S 方程的三角函数类型的基函数格式。为了验证此方法，我们首先数值地计算了有限长度的二维渠道内的流动和有限长度的圆管内流动，采用我们的方法解出的速度分布和压力分布除入口段和出口段外，与库塔流和泊肃叶流的结果十分吻合。在方法得到初步验证后，本文采用三角函数基函数法及非结构网格生成技术，进一步数值地研究了二维、三维情况下动脉瘤内的血液动力学问题，在定常情形下计算了二维和三维动脉瘤的速度、压力及剪切力分布，以及动脉瘤的几何参数、雷诺数等参数对血液动力学因素的影响。计算结果表明：

（1） 瘤壁的最大剪切力和最大压力都发生在瘤远端（或附近），因此，该区域应该是动脉瘤生长和发生破裂的危险区；

（2） 在相同的几何参数情况下，动脉瘤的最大剪切力会随雷诺数的增加而增大；

（3） 而在相同的雷诺数下，动脉瘤的最大剪切力则会随瘤半径、瘤深的增加而增大；

（4） 二维动脉瘤的流场较容易形成涡旋结构，而且涡旋的范围随瘤半径、瘤深的增加而增大，但三维动脉瘤都没有形成涡旋结构。

我们使用的二维、三维非结构网格是由 Delaunay 方法和前沿推进法相结合的方法生成的，结合了二者的优势——采用前沿推进法布点，然后用 Delaunay 三角化方法对结点进行连接。另外，为了提高网格质量，我们采用 Laplacian 光顺迭代技术。

本文的研究表明三角函数基函数法应用于数值求解粘性不可压缩流动是成功的。

§ 3.2 本部分主要的创新点

在这一部分工作中，本文主要的**创造性成果**有：

3．首次构造出数值求解不可压缩流体 N-S 方程的三角函数基函数格式。这是一种新型的计算格式，具有精度好，计算量小，易于处理复杂边界，格式构造

统一、规范等优点；

4. 利用这一新型的计算格式计算了二维、三维动脉瘤内定常血液流动并研究了动脉瘤几何形状、雷诺数等参数对速度、压力及瘤壁剪切力分布的影响。三维动脉瘤这一部分内容未见国内外有同类报道，且对临床治疗有一定指导意义。

§3.3 进一步的工作

在本文的基础上，还有许多研究工作可做：

1. 由于本文构造的是显式基函数法，计算中时间步长受到稳定条件的限制，不仅减慢收敛速度，加大了计算量，而且过大的时间步长还会导致计算发散。为此，需要发展隐式格式；
2. 可以将基函数法用于计算非定常可压缩和不可压缩流动，以及具有化学反应的复杂流动；
3. 将基函数法应用于处理其他各类流体力学问题，固体力学问题和物理问题。

附录 I 应用三角函数基函数法计算三维超音速球头绕流问题

第一节 引言

三角函数基函数法首次用在二维可压缩流动中是在文献[12]中进行的，本文将文献[12]构造的无粘可压缩流动无波动的三角函数基函数法推广到三维情形，完成了三维三角函数基函数法的理论框架、公式推导及程序的编制。由二维向三维的推广不存在原理上的困难，但是三维计算与二维相比技术上有很大的差异，难度也大大增加了，它对网格的质量依赖性更大，要求更苛刻，在网格生成及自适应技术等计算技巧上也存在不少困难和一系列值得研究的问题。

我们用三角函数基函数法数值模拟了无粘可压缩的三维球头绕流。采用通量分裂法及激波前后中心格式和迎风格式相结合的技术，以消除激波附近的非物理波动；我们构造数值求解三维可压缩流动的三角函数类型的一阶精度的基函数格式。各点处于激波前或后是通过在非结构网格上计算单侧导数来判断的。

谢文俊等人在文献[11]曾经用多项式基函数法模拟过这个三维球头绕流问题，但没有进行自适应。在这里，我们用三角函数基函数法重新模拟了这个算例，重新生成非结构网格，并进行过两次自适应。其数值计算结果是相当令人满意的，其压力、密度分布较之谢文俊的结果更为准确，精度也得到很大的提高。

第二节 三维可压缩流体 Euler 方程基函数格式的构建

§ 2.1 控制方程

三维守恒型的可压缩流体的 Euler 方程组：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial z}=0\\
&U=\left(\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho w \quad e\right)^T\\
&E=\left(\rho u \quad \rho u^2+p \quad \rho u v \quad \rho u w \quad u\left(e+p\right)\right)^T\\
&F=\left(\rho v \quad \rho u v \quad \rho v^2+p \quad \rho v w \quad v\left(e+p\right)\right)^T\\
&G=\left(\rho w \quad \rho u w \quad \rho v w \quad \rho w^2+p \quad w\left(e+p\right)\right)^T
\end{aligned} \tag{2.1}$$

气体的状态方程为

$$e=\frac{1}{2}\rho\left(u^2+v^2+w^2\right)+\frac{p}{\gamma-1} \tag{2.2}$$

其中，ρ、p、e、u、v、w 分别为气体的密度、压力、总能和直角坐标系下的三个速度分量，γ 为气体比热比，本文中取为 1.4。

对方程用无穷远处的物理量值 ρ_∞, U_∞ 及绕流物体的特征长度 L 无量纲化，

$$\begin{aligned}&x = x^* L，\ t = tL / U_\infty，\\&\rho = \rho^*\ \rho_\infty，\ p = p^*\ \rho_\infty U_\infty^2，\ e = e^*\ \rho_\infty U_\infty^2，\\&u = u^*\ U_\infty，\ v = v^*\ U_\infty，\ w = w^*\ U_\infty\end{aligned} \tag{2.3}$$

无量纲化后，Euler 方程和状态方程的形式不变。无穷远处来流条件变为

$$\begin{aligned}&u^* = u_\infty / U_\infty，\ v^* = v_\infty / U_\infty，\ w^* = w_\infty / U_\infty\\&\rho^* = 1，\ p^* = p_\infty \big/ \left(\rho_\infty U_\infty^2\right) = 1 \big/ \gamma\ M_\infty^2\end{aligned} \tag{2.4}$$

M_∞ 为无穷远马赫数。以下为简便起见，将无量纲变量的“*”都去掉。

§ 2.2 流通量分裂法及无波动混合格式的采用

数值求解高速可压缩流场时，由于流场中激波和切向间断的产生，不管初始值是如何光滑，解都可能是有间断的。这一特性使得 Euler 方程——非线性双曲型方程的求解有它特殊的困难，流场中激波的数值模拟成为计算流体力学中所研究的重要问题之一。

当采用激波捕捉法来进行数值模拟时，如果格式精度过低，那么数值耗散大，激波分辨率不高，甚至容易被抹平。因此一般应采用二阶或二阶以上的格式，但是这时由于数值的频散，解在激波前后会出现波动[19]。为提高激波捕捉的质量，在差分方法[20-23]和有限元法[24-27]中都发展出了一系列高分辨率无波动格式。例如差分方法中著名的 NND 格式以及它在有限元法中的推广。在基函数法中我们也借鉴这些成功经验，来构造一种高分辨率无波动的基函数格式。

2.2.1 流通量的分裂

首先，我们对守恒型的 Euler 方程(2.1)采用流通量分裂技术。将方程改写为：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A_i \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \quad , \qquad A_i = \frac{\partial F_i}{\partial U} \quad , \quad F_i = A_i U \tag{2.5}$$

$$(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z \quad , \quad F_1 = E, F_2 = F, F_3 = G)$$

根据双曲型方程的特点，必有一非奇异矩阵 Q_i，使得

$$A_i = Q_i^{-1} \Lambda_i Q_i \tag{2.6}$$

其中，Λ_i 为特征对角线矩阵

$$\Lambda_i = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \tag{2.7}$$

λ_i 为 A_i 特征值，按正、负特征值，可以将 Λ_i 分裂

$$\Lambda_i = \Lambda_i^+ + \Lambda_i^- \tag{2.8}$$

$$\Lambda_i^{\pm} = diag(\lambda_1^{\pm}, \ldots, \ \lambda_5^{\pm}) \quad , \quad \lambda_l^{\pm} = (\lambda_l \pm |\lambda_l|)/2$$

令

$$A_i^{\pm} = Q_i^{-1} \Lambda_i^{\pm} Q_i \qquad F_i^{\pm} = A_i^{\pm} U \tag{2.9}$$

则(2.1)式改写为：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i^+}{\partial x_i} + \frac{\partial F_i^-}{\partial x_i} = 0 \tag{2.10}$$

在间断前后，对 F_i^+， F_i^- 可以分别采取不同的格式以消除波动。

2.2.2　混合格式的采用

为了准确地捕捉到激波的位置，激波前后必须采取恰当的格式。在差分法的 NND 格式中，波前采取了迎风型的格式，波后则用中心型格式，并且都收到了很好的效果。事实上，我们考察一下激波前后的不同的物理特性，就可以发现这样做的合理性。

任何一个斜激波在波前波后都可看作是在各个坐标方向的分量的复合。假设间断面与各个方向均不重合，由于激波的存在，速度将减小，很容易证明各个方向上速度在波前的分量要大于其在波后的分量，即各个方向上速度都会发生间断，因此可将斜激波看作是沿坐标轴方向的几个正激波的复合。由于超音速气流通过正激波后总是会减速变为亚音速，因此，分解后的正激波两侧，总是波前为超音速，波后为亚音速。考虑到超音速流场中信息只能沿气流流动方向传播，因此，数值模拟时，在波前采用迎风型格式是合理的。而亚音速流场中，信息可以逆向传播，因此，数值模拟时，波后要采用中心格式。要注意的是，对于分裂后的流通量，正的流通量分量和负的分量的波前波后是相反的。图 1 给出了间断前后格式选取的示意图。

我们在前面讨论过，采用高阶格式时，在激波附近会出现数值波动，这些非物理的数值波动是不合理的，因此，在波动区还应适当的引进一阶的格式来抑制这种波动。

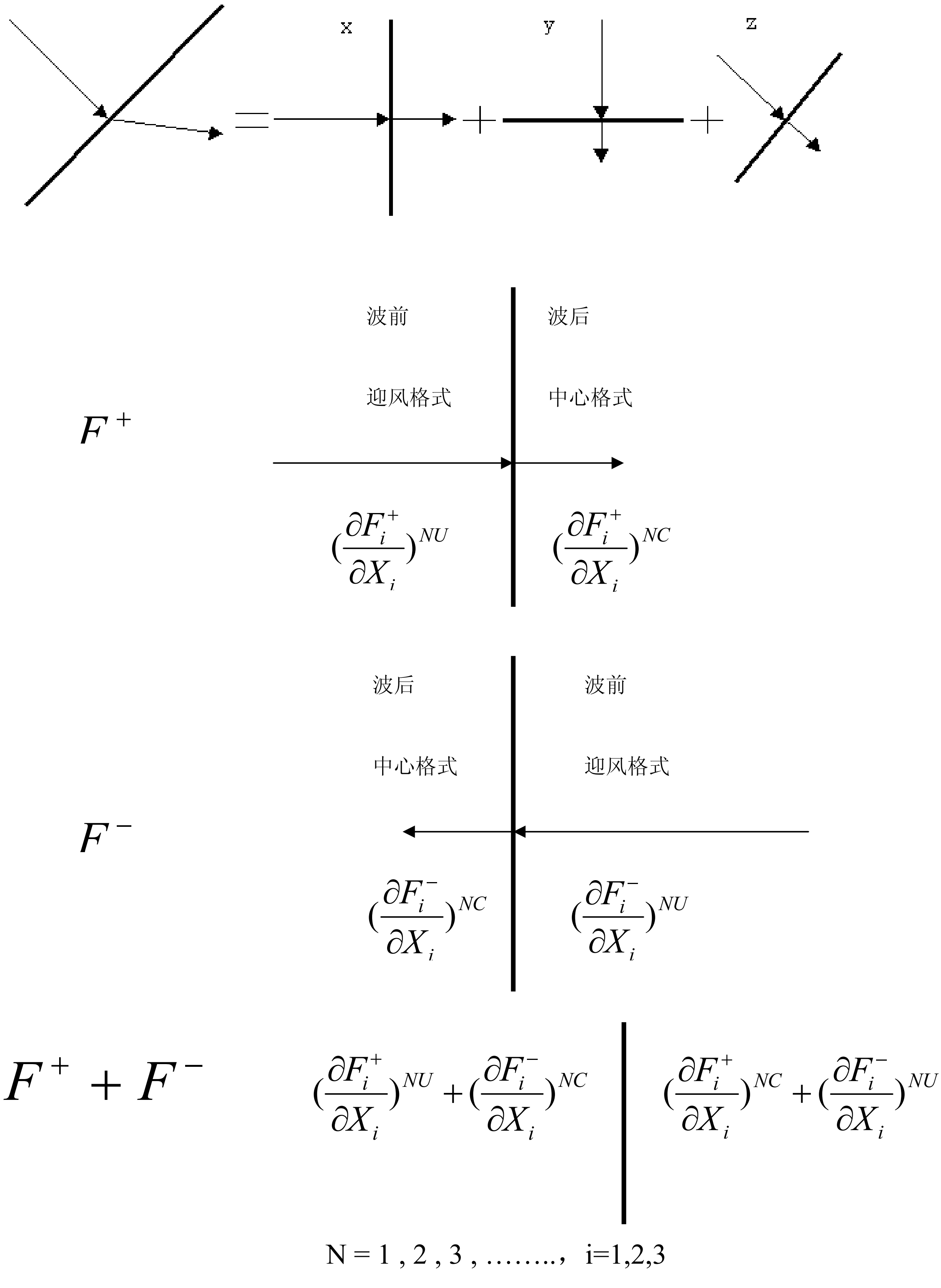


图 1 基函数法在激波前后的格式选取示意图

综上所述，可压缩流体 Euler 方程的基函数格式应是经过流通量分裂后，对各个分裂的流通量分别采取 N 阶中心格式、N 阶迎风格式和一阶迎风格式相结合的一种无波动的混合格式。这种格式可以有效地消除激波附近的数值波动。

§ 2.3 间断前后的判断及基函数格式的选取

选定格式后，必须能够在计算中数值判定网格点在流场中相对于激波的位置。为此，我们首先观察一下激波前后物理量的分布。

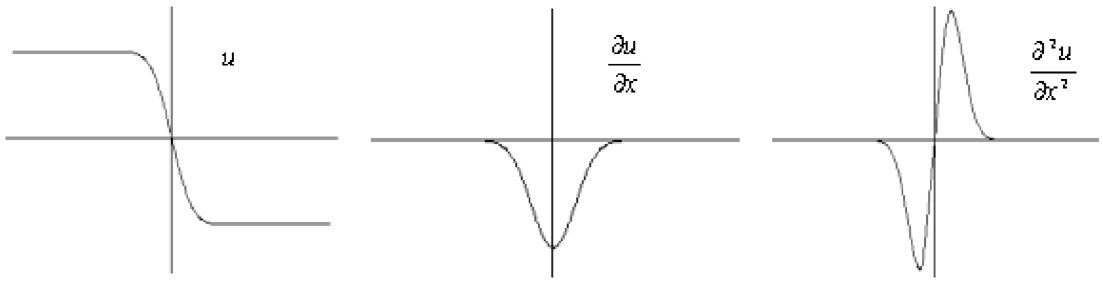


图 2 间断前后的物理量分布

图 2 是根据 Burgers 方程精确解绘出的间断前后物理量的分布，不难看出，间断前，物理量的一阶导数和二阶导数的符号一致，而间断后两者的符号则相反。由此，我们可以给出间断前后的判断准则：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_i}{\partial x_i} \text{与} \dfrac{\partial^2 F_i}{\partial x_i^2} \text{同号，节点在} x_i \text{方向位于间断上游} \\ \dfrac{\partial F_i}{\partial x_i} \text{与} \dfrac{\partial^2 F_i}{\partial x_i^2} \text{异号，节点在} x_i \text{方向位于间断下游} \end{cases}$$

在前面构造迎风格式时，也给出了一种单侧导数的算法,我们可以按照这种方法给出 F_i 沿 x_i 方向在正负两侧的单侧导数 $\delta^+ F_i$ 和 $\delta^- F_i$ 。因为我们只是对节点的符号进行判断，引入：

$$\delta^2 F_i = \delta^+ F_i - \delta^- F_i \quad , \quad \delta F_i = \delta^+ F_i + \delta^- F_i$$

显然，$\delta^2 F_i$，δF_i 分别与通量 F_i 的二阶导数和一阶导数相当。由此可将间断前后的判断准则改写为：

$$\begin{cases} \delta^+ F_i \cdot \delta^- F_i \le 0\text{，节点在波动区} \\ \delta^+ F_i \cdot \delta^- F_i > 0\text{，且} \delta^2 F_i \cdot \delta F_i > 0\text{，节点在间断上游} \\ \delta^+ F_i \cdot \delta^- F_i > 0\text{，且} \delta^2 F_i \cdot \delta F_i < 0\text{，节点在间断下游} \end{cases}$$

当 $\delta^+ F_i$ 和 $\delta^- F_i$ 同号时，说明数值解单调，不在激波区，应继续判断与是否同号以确定在间断的上游或下游，分别选择迎风格式或中心格式。

当$\delta^+ F_i$和$\delta^- F_i$异号时，说明数值解出现波动，应采用一阶迎风格式来抑制波动，使局部极值逐渐消除。表 1 给出了具体的格式的选取。

表 1 基函数格式的选取

	$\delta^+ F_i$与$\delta^- F_i$同号		$\delta^+ F_i$与$\delta^- F_i$异号
	间断上游区	间断下游区	
	$\delta^2 F_i$与δF_i同号	$\delta^2 F_i$与δF_i异号	
$a^+ > 0$	$\left[\dfrac{\partial F_i^+}{\partial x_i}\right]^{NU}$	$\left[\dfrac{\partial F_i^+}{\partial x_i}\right]^{NC}$	$\left[\dfrac{\partial F_i}{\partial x_i}\right]^{1U}$
$a^+ < 0$	$\left[\dfrac{\partial F_i^-}{\partial x_i}\right]^{NC}$	$\left[\dfrac{\partial F_i^-}{\partial x_i}\right]^{NU}$	
$a^+ + a^-$	$\left[\dfrac{\partial F_i^+}{\partial x_i}\right]^{NU} + \left[\dfrac{\partial F_i^-}{\partial x_i}\right]^{NC}$	$\left[\dfrac{\partial F_i^+}{\partial x_i}\right]^{NC} + \left[\dfrac{\partial F_i^-}{\partial x_i}\right]^{NU}$	$\left[\dfrac{\partial F_i}{\partial x_i}\right]^{1U}$

§ 2.4 可压缩流体 Euler 方程基函数格式的表达

通过前面几节的讨论，我们可以给出可压缩流体 Euler 方程基函数格式的表达式。为使格式易于表达，我们引进

$$\theta = \frac{\left|\delta^+ F_i - \delta^- F_i\right|}{\left|\delta^+ F_i\right| + \left|\delta^- F_i\right|} \tag{2.11}$$

及

$$K = \frac{1}{2}\left|sign(\delta^2 F_i) + sign(\delta F_i)\right| \tag{2.12}$$

采用上述消除激波附近波动的方法所构成的基函数法 N 阶格式如下式所示：

$$U^{n+1} = U^n - \Delta t \left\{ \begin{array}{l} k(1-\theta)\left[\left(\dfrac{\partial F_i^+}{\partial x_i}\right)^{NU} + \left(\dfrac{\partial F_i^-}{\partial x_i}\right)^{NC}\right] + \\ (1-k)(1-\theta)\left[\left(\dfrac{\partial F_i^-}{\partial x_i}\right)^{NU} + \left(\dfrac{\partial F_i^+}{\partial x_i}\right)^{NC}\right] + \theta\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_i}\right)^{1U} \end{array} \right\} \tag{2.13}$$

式中

$$\left[\frac{\partial F_i^{\pm}}{\partial x_i}\right]_n^{NU} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{M}\frac{\alpha_n^{e_j}}{A_{e_j}}}\sum_{j=1}^{M}\frac{\alpha_n^{e_j}}{A_{e_j}}\left[\frac{\partial F_i^{\pm(N)}}{\partial x_i}\right]_n^{e_j}$$

$$\left[\frac{\partial F_i^{\pm}}{\partial x_i}\right]_n^{NC} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{A_{e_j}}}\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{A_{e_j}}\left[\frac{\partial F_i^{\pm(N)}}{\partial x_i}\right]_n^{e_j} \tag{2.14}$$

$$\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right]_n^{1U} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_n^{e_j}}{A_{e_j}}}\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_n^{e_j}}{A_{e_j}}\left[\frac{\partial F_i^{(1)}}{\partial x_i}\right]_n^{e_j}$$

当 N=1 时，(2.13)式就是本文处理可压缩无粘流动的一阶基函数格式，求导公式由第一部分第二章中(2.3.9)式给出。

§ 2.5 边界条件和初始条件

2.5.1 边界条件

由于流体力学方程的复杂性和流动区域几何结构的多样性，如何给出流体力学方程组的定解条件，保证定解问题的适定性，一直是相当困难的事情。我们通常按照边界面上的特征线的指向给出相应个数的物理边界条件。

附录 I 的算例中，流场所涉及的边界主要为物面固壁边界和远场边界。在计算中，首先将边界点与流场的内点一起推进一步，然后再用边界条件加以修正。这种处理会使边界点上的物理量相对滞后，但不会影响计算收敛后得到的解。

(1) 固壁边界

流动在固壁上必须满足法向速度为零的无穿透条件，即(**u**・**n**)=*0*。**u** 和 **n** 分别为速度矢量和固壁的外法向单位向量，每推进一步后，对固壁上的节点用速度的切向分量 **u**-(**u**・**n**)**n** 来代替原速度向量。

(2) 远场边界

外部边界包括入流面和出流面，本文采用无反射的边界条件来处理可压缩流动中的外部边界条件。在外边界的每个节点上，按指向流体内部的特征线给出 Riemann 变量的值，其余变量的值用特征线上的相容关系确定。

2.5.2 初始条件

本文涉及的几个算例都是定常的。我们采取了时间推进的方法进行迭代，此时无论给出何种初值，只要不影响计算的收敛，当时间趋于无穷时，都能得到唯

一的定常解。为获取定常解，本文采用均匀来流作为初始条件。如果攻角为α，偏航角为β，来流马赫数为M_∞，那么初始条件为

$$
\begin{aligned}
&u\big|_{t=0} = u_\infty = \cos\alpha\cos\beta \\
&v\big|_{t=0} = v_\infty = \cos\alpha\sin\beta \\
&w\big|_{t=0} = w_\infty = \sin\alpha \\
&p\big|_{t=0} = p_\infty = 1/\gamma M_\infty^2 \\
&\rho\big|_{t=0} = \rho_\infty = 1
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

对于非定常问题，应视不同问题给出不同的初始条件。

§ 2.6 三维非结构网格的自适应

本文采用了重新生成网格的方法来实现自适应加密。生成自适应网格的过程与生成初网格的过程是完全一样的，生成自适应网格所用的背景网格是初网格。

现在问题的关键是要在背景网格即初网格的结点上给出尺度参数。如何根据初网格上的计算结果确定其结点上的尺度呢？直观的说，我们希望在解变化剧烈的地方，网格取得密些，而在变化平缓的地方，则取得疏些。为此，在计算可压缩流体时，本文选取了密度的梯度的大小$|\nabla\rho|$来作为标准，对于背景网格上的一个结点，其上的尺度h应满足

$$h \times |\nabla\rho| = 常数 \tag{2.16}$$

显然，在均匀流动区，由于密度梯度小，计算的尺度h将很大，而在激波附近，由于密度的梯度大，计算的尺度h将很小。在实际应用中，对于尺度值给定了上界及下界，以避免生成过分畸形的单元。

§ 2.7 可压缩流体 Euler 方程的基函数格式计算流程

1．网格生成

2．数值计算

（1） 已知$t = t^n$时刻的结果U^n（n=0 时即为初值），求$t = t^n + \Delta t$时刻的 U 值： $U^{n+1} = U^n + \Delta U$；

（2） 根据U^n计算分裂通量F^+和F^-；

（3） 用间断前后的判断准则，判断各点在流场中相对于激波的位置；

（4） 对每点按其位置确定应采用的格式，并用此格式求出它在各方向上分裂流通量的导数值；

（5） 对每个节点在各个不同的单元内分裂通量的导数值进行加权平均，求出该节点在各方向上的唯一的分裂通量导数值；

（6） 将流通量导数值带入（2.13），求出 U 的增量，并由此算出新的 U 值；

（7） 这样一直迭代下去，直到数值解达到要求的精度为止

3．利用网格自适应技术对激波区加密，然后，以初网格计算结果为初值再次计算

第三节　数值结果及分析

为了验证三角函数基函数法在三维无粘可压缩问题中的有效性，这里选择了三维球头超音速绕流这个算例。采用三角函数为基函数，对三维球头进行了初网格计算并采用网格自适应技术以提高对间断的分辨能力。

三维球头算例选自文献[42]，谢文俊也曾经用多项式基函数法计算过 1/8 球头的情形[11]，但没采用自适应技术。本文没有用其对称性条件，计算了 1/2 球头，$M_\infty = 7.0$，攻角$\alpha = 0$。这个问题应该是轴对称流动，但本文当作三维无粘可压缩问题处理。

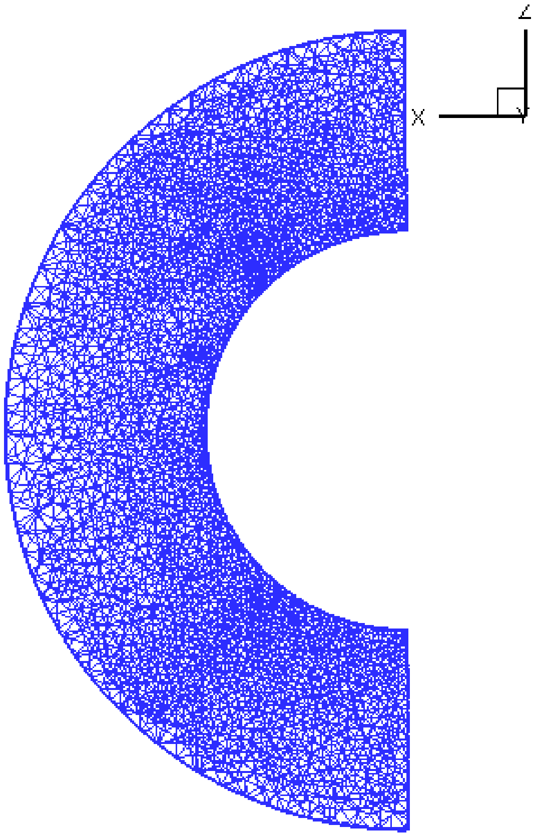
图 3~图 6 是初网格得到的结果。图 3 给出了 *x-z* 平面和 *x-y* 平面的网格，图 4 给出 *x-z* 平面和 *x-y* 平面的压力等值线，图 5 给出 *x-z* 平面和 *x-y* 平面的密度等值线，图 6 是 *x-z* 平面和 *x-y* 平面上压力沿物面的分布与文献[42]结果的比较。

图 7~图 10 是自适应网格得到的结果，依次是 *x-z* 平面和 *x-y* 平面的网格、*x-z* 平面和 *x-y* 平面的压力等值线，*x-z* 平面和 *x-y* 平面的密度等值线，以及 *x-z* 平面和 *x-y* 平面上压力沿物面的分布与文献[42]结果的比较。

第四节　总结

为了验证三角函数基函数法对无粘可压缩流动的有效性，附录 I 中采用三角函数基函数法及非结构网格技术研究了超音速三维球头绕流，采用通量分裂法及中心格式和迎风格式相结合的技术，以消除激波附近的非物理波动，并构造出数值求解可压缩流动的三角函数类型的基函数格式。这个算例的数值结果是比较令人满意的，准确度和精度都较文[11]中的好。

为了更精确的描述激波的位置，我们对于超音速三维球头绕流算例采用了自适应技术，显著提高了结果的分辨率和精度。在实现自适应技术时，我们主要是以初始网格作为自适应的背景网格，根据初始网格上各点的密度的梯度来确定其上的尺度因子，重新生成网格。



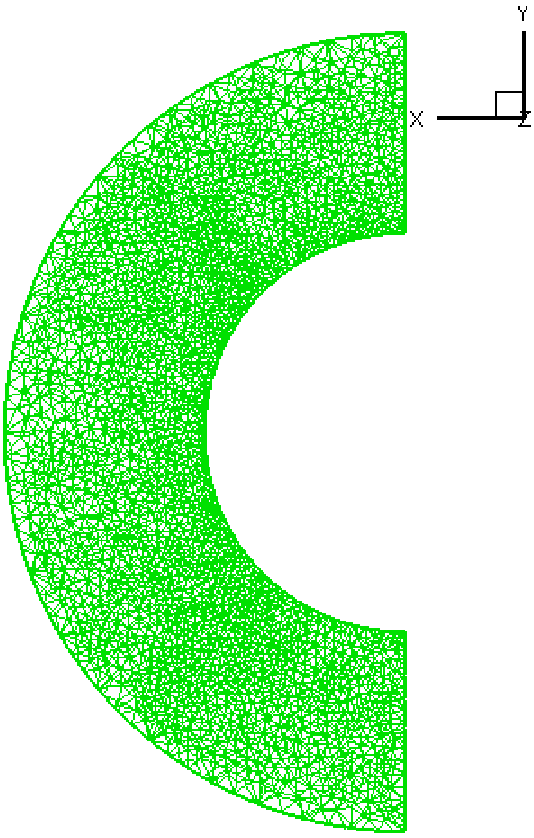


图 3 三维球头超音速绕流（$M_\infty = 7.0$）的 x-z 平面与 x-y 平面的初网格分布

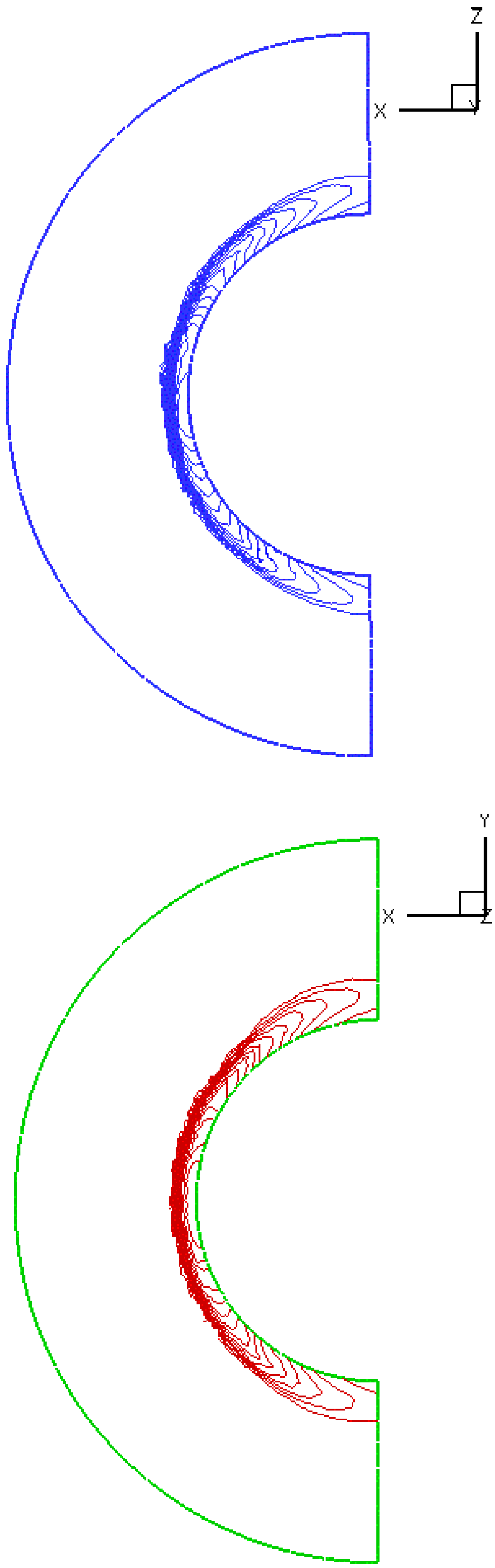


图 4 三维球头超音速绕流 x-z 平面和 x-y 平面的压力等值线

（初网格）

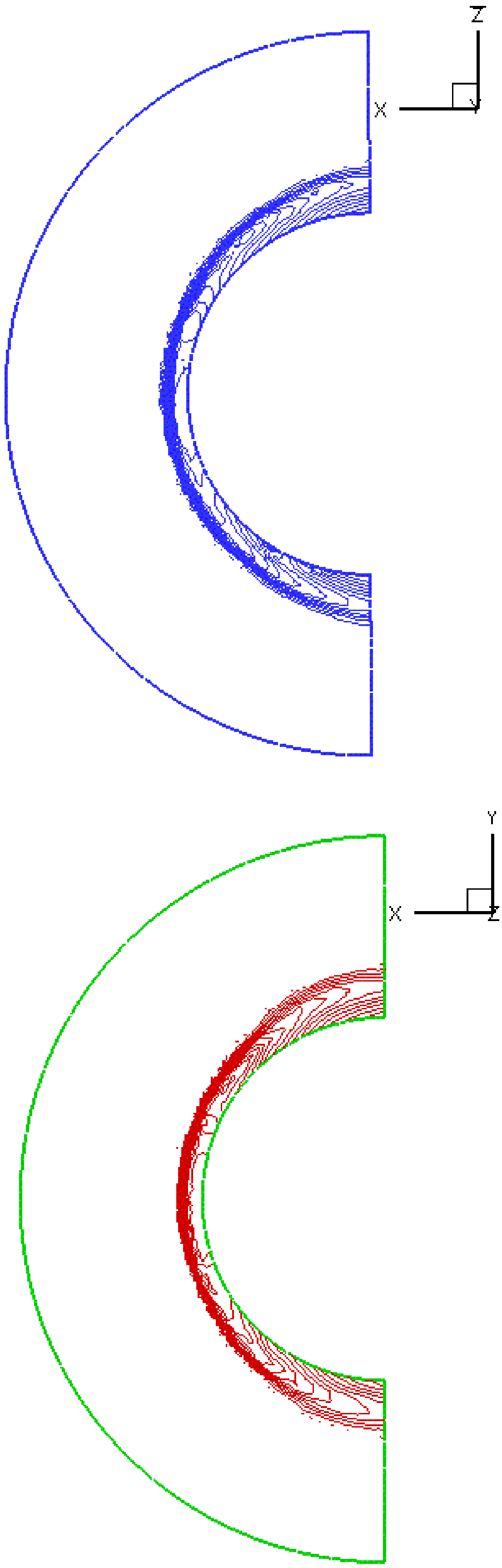


图 5 三维球头超音速绕流 *x-z* 平面和 *x-y* 平面的密度等值线

（初网格）

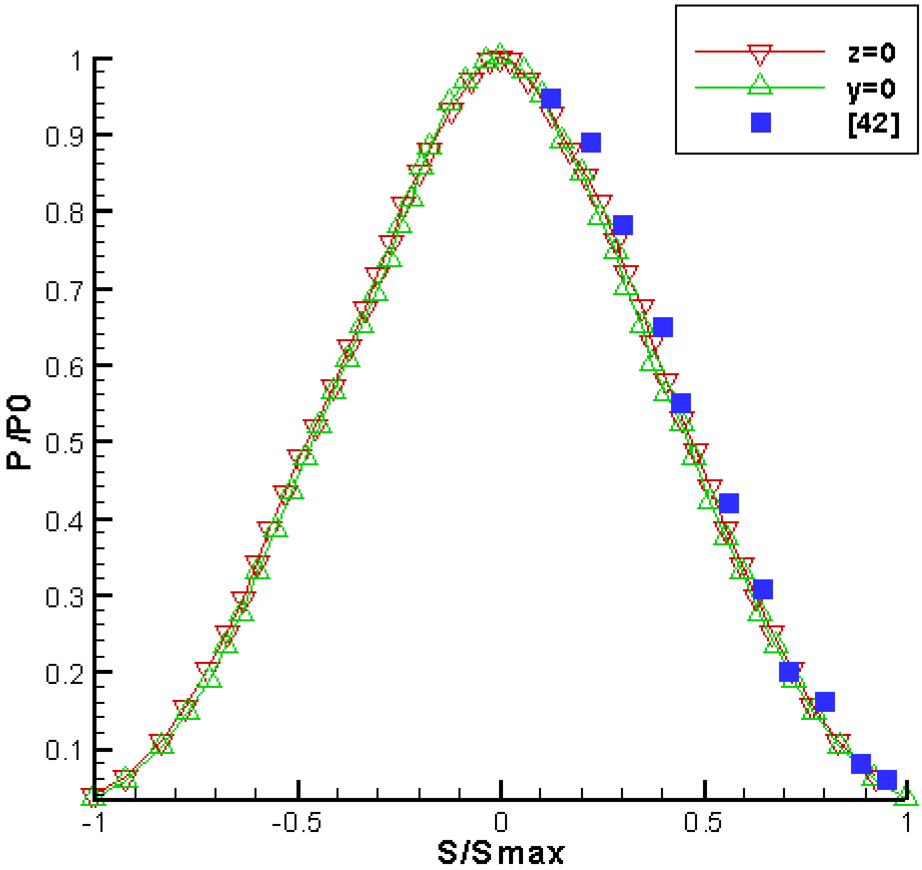


图 6 三维球头超音速绕流 *x-z* 平面和 *x-y* 平面上压力沿物面的分布比较（初网格）

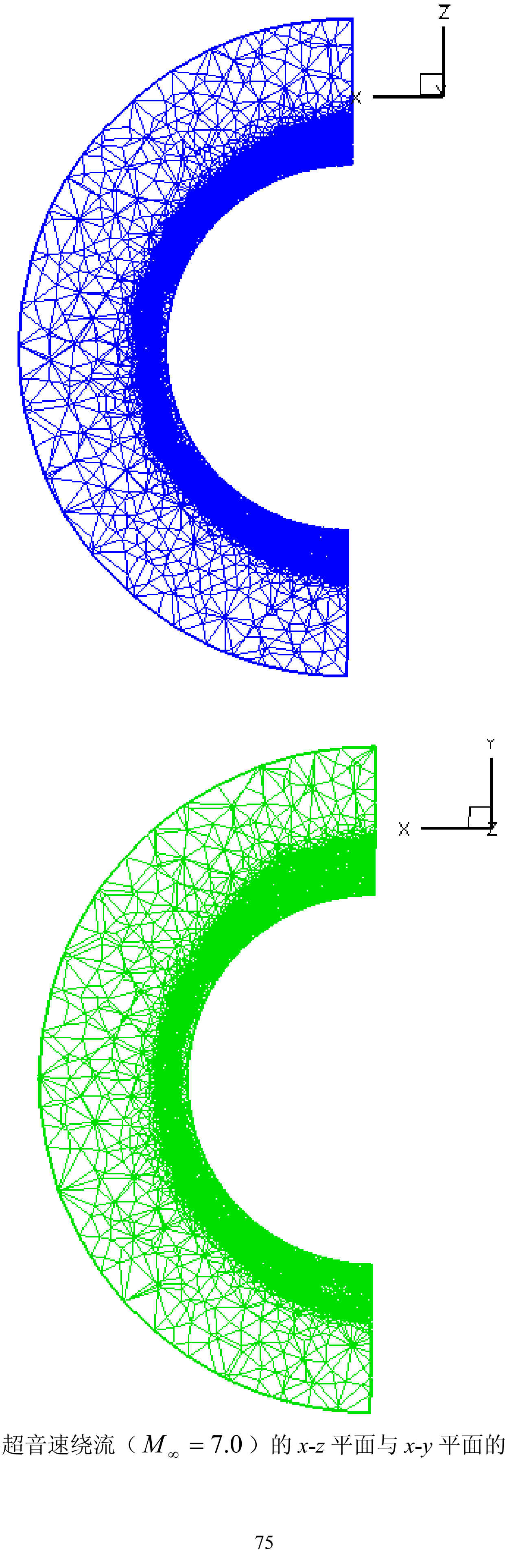
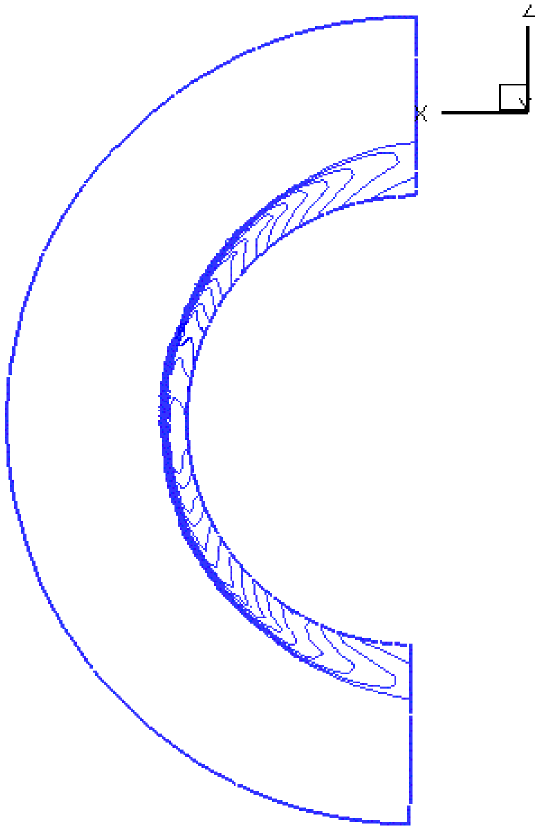


图 7 三维球头超音速绕流（$M_\infty = 7.0$）的 x-z 平面与 x-y 平面的自适应网格分布



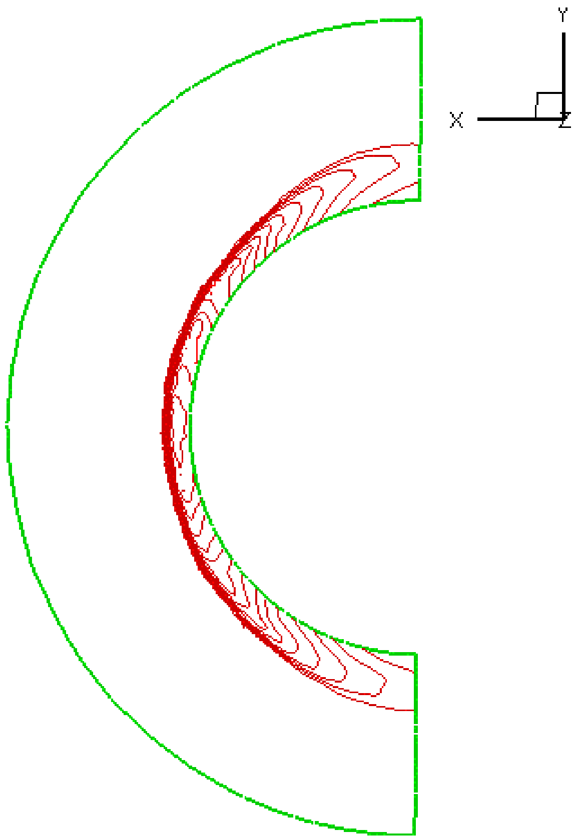


图 8 三维球头超音速绕流 x-z 平面和 x-y 平面的压力等值线

（自适应网格）

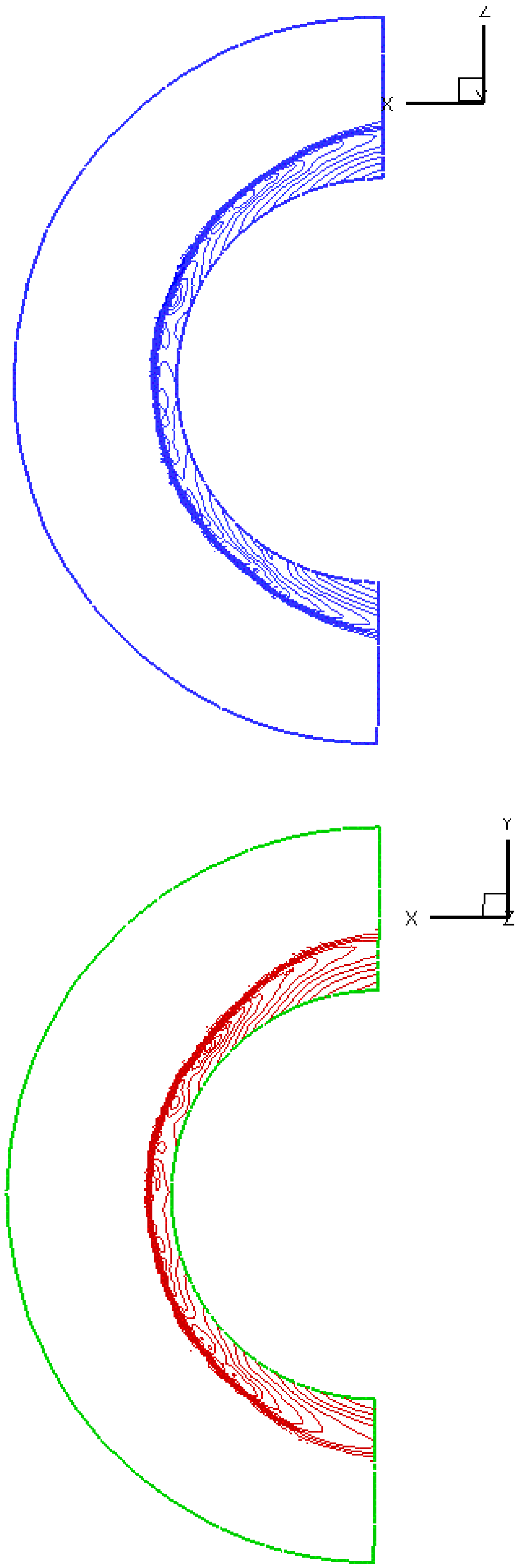


图 9 三维球头超音速绕流 *x-z* 平面和 *x-y* 平面的密度等值线

（自适应网格）

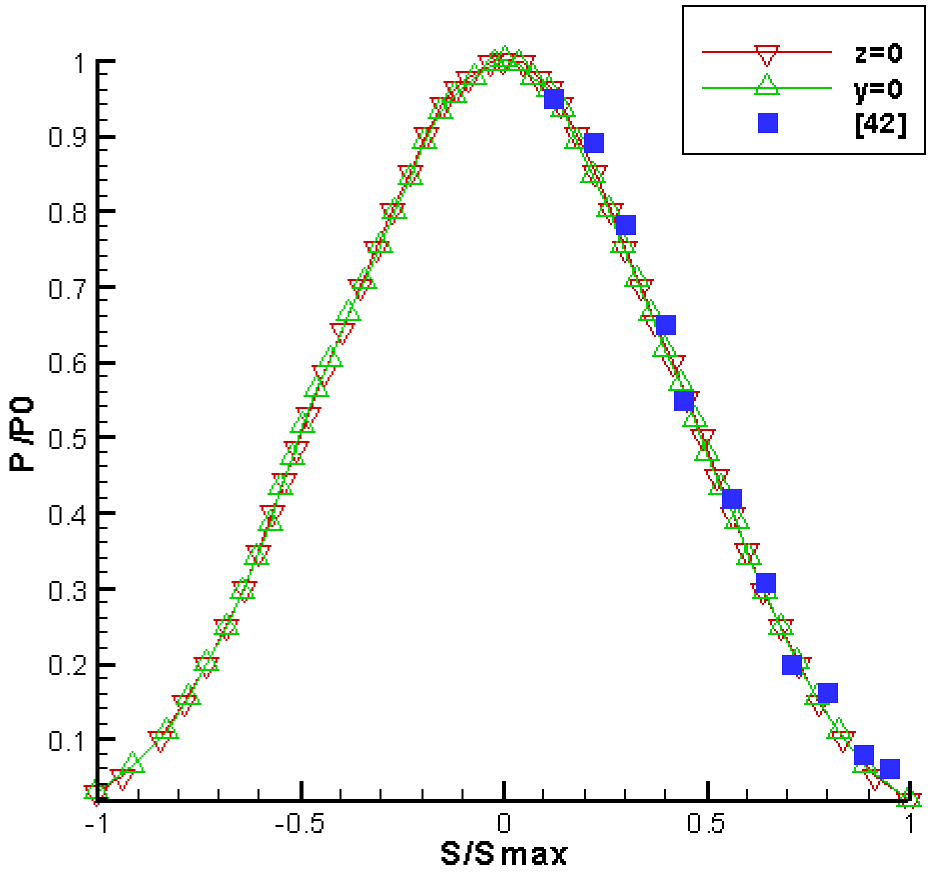


图 10 三维球头超音速绕流 *x-z* 平面和 *x-y* 平面上压力沿物面的分布比较

（自适应网格）

参考文献

［1］ 忻孝康等编著，计算流体力学，国防科技大学出版社，1989

[2] Roache P.J., Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, Albuquerque N.M., 1972

[3] Anderson D.A., Tannehill J.C. and Pletcher R.H., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Mcgraw-Hill, New York, 1984

[4] Hirsh C., Numerical Computation of Internal and External Flow, Vol. 2, Computational Methods for Inviscid and Viscous Flow, John Wiley & Sons, 1990

[5] 傅德薰主编，流体力学数值模拟，国防工业出版社，1993

[6] Turner,M.J., Clough,R.W., Martin,H.C., Topp,L.J., Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, J. Aeronant. Sci., 1956, 23 (9)

[7] Clough R.W., The Finite Element Method in Plane Stress Analysis, Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., 1960

[8] Chung T.J. 著，张二骏等译，流体动力学的有限元分析，机械工业出版社，1980

[9] 林光，基函数法：一种新型在非结构网格上离散微分算子的数值计算方法，北京大学硕士研究生学位论文，2000

[10] 吴望一，万蕾，向宇，基函数法在一维可压缩流体中的应用，待发表

[11] 谢文俊. 基函数法在三维无粘可压缩流动中的研究与应用以及三维非结构网格的生成及自适应技术研究. 北京大学硕士研究生学位论文，2002

[12] 李俊修. 三角函数基函数法. 北京大学硕士研究生学位论文，2003

[13] Chorin, A I. A Numerical method for solving incompressible viscous flow problem. Journal of Computation Physics. 1967, 2: 12-16

[14] Turkle E. Preconditioned methods for solving the incompressible and low-speed compressible equations. Journal of Computation Physics. 1987, 72(2): 277-298

[15] Merkle CL and Choi, D. Application of time–iterative schemes to incompressible flow. AIAA J. 1985, 23: 1518-1524

[16] 温功碧，陈作斌. 三维非定常/定常不可压缩流动N-S方程基于人工压缩性方法的数值模拟. 应用数学和力学. 2004, 25(1): 53-66

[17] Pan D, Chakravarthy S. Unified formulation for incompressible flows. AIAA-89-0122

[18] Rogers S E, Kwak D, Kiri C. Steady and unsteady solution of the incompressible Navier-Stokes equation. 1991, 29(4): 603-610

[19] 马铁犹编著，计算流体动力学，北京航空学院出版社，1986

[20] Harten A., High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, Journal of

Computational Physics, 1983, 49: 357-393

[21] Roe P.L., Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes, J. of Comp. Phys. 1981, 43:357-372

[22] Harten A. and Lax P.D., SIAM J. Numer. Anal., 1981, 18

[23] 张涵信，无波动、无自由参数的耗散差分格式，空气动力学学报，1988,6(2):143-165

[24] Donea J. and Giuliani S., A simple Method to Generate High-order Accurate Convection Operators for Explicit Schemes Based on Linear Finite Elements, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1981, 1: 631-669

[25] Donea J., A Taylor-Galerkin Method for Convective transport problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1984, 20: 101-120

[26] Donea J., Quartapelle L. and Selmin V., An Analysis of Time Discretization in the Finite Element Solution of Hyperbolic Problems, Journal of Computational Physics, 1987, 70: 463-499

[27] Löhner R., et al., Finite element flux-corrected transport (FEM-FCT) for the Euler and Navier-Stokes equations. Internation Journal for Numerical Methods in Fluids., 1987, 7: 1093-1109

[28] 徐守栋，求解超\高超声速无粘绕流的自适应有限元方法，北京大学博士论文，1992

[29] Bykat A., Automatic Generation of Triangular Grids: I. Subdivision of General Polygon into Convex Subregions; II. Triangulation of Convex Polygons, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1976, 11: 1329-1342

[30] Yerry M.A., Automatic Three-Dimension Mesh Generator by the Modified-octree Technique, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1984, 20: 1965-1990

[31] Buratynski E.K., A Fully Automatic Three-Dimension Mesh Generator for Complex Geometries, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1990, 30: 931-952

[32] Bowyer A., Computer Dirichlet tesselations, Computer Journal, 1981, 24: 162-166

[33] Watson D. F., Computing the N-Dimensional Delaunay Tessellation with Application to Voronoi Polytopes, Computer Journal, 1981, 24: 167-172

[34] 蔡庆东，新型 NND 有限元方法和三维 FCT 有限元技术的研究，北京大学博士论文，1997

[35] Löhner R. and Parikh P., Generation of Three-Dimensional Unstructured Grids by the Advancing Front Method, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1988, 8: 1135-1149

[36] Jin H. and Tanner R.I., Generation of Unstructured Tetrahedral Meshs by Advancing Front Technique, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1993, 36: 1805-1823

[37] Shahyar Pirzadeh, Structured Background Grids for Generation of Unstructured Grids by Advancing Front Methods, AIAA J. 1993, 31:257-265

[38] Peraire J. et al., Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations, Journal of Computational Physics, 1987, 72: 449-466

[39] Löhner R., Some Useful Data Structures for the Generation of Unstructured Grids, Communications in Applied Numerical Methods, 1988, 4: 123-135

[40] Lo S.H., A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1985, 21: 1403-1426

[41] Muller J.D., Roe P.L. and Deconinck H., A Frontal Approach for Internal Node Generation in Delaunay Triangulations, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1993, 17: 241-255

[42] Yamamoto, Y., Numerical Simulation of Hypersonic Viscous Flow for the Design of H-Orbiting Plane(HOPE), AIAA Paper 90-0601

[43] 凌锋主编. 介入神经放射学. 人民卫生出版社. 1991

[44] Andrea N, Minyard, MD, et.al. Intracranial Saccular (Berry) Aneurysm: A brief overview. Southern Medical Journal. 1997, 90(7): 672-677

[45] Burleson A. C. Identification of quantifiable hemodynamic factors in the assessment of cerebral aneurysm behavior. On behalf of the subcommittee on Biorheology of the Scientific and Standardization Committee of the ISTH. Thromb Haemost. 1996, 76(1); 118-123

[46] K. Perktold, T. Kenner, K. Hilbert, B. Spork, et.al. Numerical blood flow analysis: arterial bifurcation with a saccular aneurysm. Bacis Bes. In Cardiology. 83: 24-31

[47] K. Perktold, R. Peter and M. Resch. Pesch. Pulsatile Non-Newtonial blood flow simulation through a bifurcation with an aneurysm Biorheology. 1989, 26: 1011-1030

[48] Aenis M., Stancampiano A. P., Wakhloo A. K., Lieber B. B.. Modeling of flow in a straight stented and non stented side wall aneurysm model. Jof Biomech. Eng., 1997, 119(2): 206-12

[49] M. Low, K. Perktold, R. Raunig. Hemodynamics in rigid and distensible saccular aneurysms: A numerical study of pulsatile flow characteristics. Biorheology. 1993, 30: 287-298

[50] Hayashi K, Handa H, Nagasawa S. Okumura A, Moritake K, Stiffness and elastic behavior of human intracranial and extracranial arteries. J Biomechanics. 1980, 13: 175-184

[51] George N. Foutrakis, Howard Yonas, Robert J. Sclabassi, Saccular aneurysm formation in curved and bifurcation arteries. AJNR Am J Neuroradiol. 1999, 20: 1309-1317

[52] H. J. Steiger, A. Poll, D. W. Liepsch, H. J. Reulen. Hemocdynamic tress in terminal aneurysms. Acta Neurochir. 1988, 93: 18-23

[53] 许世云，严宗毅，张鸿祺，凌锋. 脑动脉瘤体外模拟实验. 国外医学生物医学工程分册（待发表）

[54] D. W. Liepsch, H. J. Steiger and A. Poll. Hemodynamic stress in lateral saccular aneurysms. Biorheology. 1987, 24: 689-710

[55] Carlos F. Gonzalez, Young L. Cho, Hector V., et,al. Intracranial Aneurysms: Flow analysis of their origin and progression. AJNR. 1992, 13: 181-188

[56] Armelle C. Burleson, Charles M. Strother, Vincent T, Turitto. Computer modeling of Intracranial Saccular and Lateral Aneurysms for the study of their Hemodynamics. Neurosurgery. 1995, 37(4): 774-784

[57] 符策基. 颅内动脉瘤血液动力学的二维数值模拟. 北京大学硕士研究生学位论文，2000

[58] 陈伟. 颅内动脉瘤的三维N-S方程数值模拟. 北京大学硕士研究生学位论文. 2002

[59] 吴望一，R. 斯加拉克. 半无穷长圆管内的低雷诺数入口流. 应用数学与力学. 1983, 4(6): 743-757

[60] 孙树津. 关于脑动静脉畸形血液动力学的研究. 北京大学博士学位论文. 2002

[61] 吴望一. 流体力学（上册）. 北京大学出版社. 1982, 205-239

第二部分 肝门静脉高压症形成早期的血液动力学、血液流变学及病理学研究

第一章 绪 论

§ 1.1 引言

§ 1.1.1 肝组织结构、肝硬化以及胶原纤维的简单介绍

一、　　肝(Liver)

肝是人体最大的消化腺，由于其血液供应非常丰富，故正常情况下肝呈红褐色。在肝门外的结缔组织沿着肝门管道伸入肝实质内，将肝分隔为许多的肝小叶(Hepatic Lobule)也称为经典肝小叶(Classic Lobule)。肝小叶间的结缔组织较少，由肝门进出的门静脉、肝动脉、肝管、淋巴管和神经的分支行于肝小叶间的结缔组织内。肝小叶呈多角棱柱体，肝静脉的属支中央静脉贯穿肝小叶长轴的中心（图1-1）。

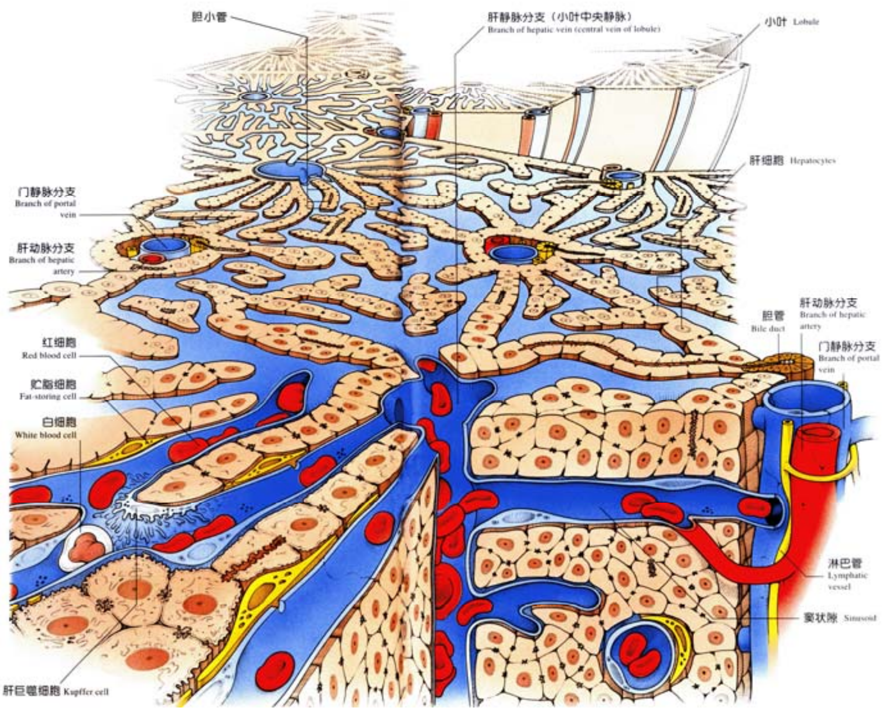


图 1-1 肝组织（模式图）

在肝组织的切片中，邻近几个肝小叶之间的结缔组织内，常见小叶间静脉、小叶间动脉和小叶间胆管的横切面，称之为门管区(Portal Area)或汇管区。人和多数动物如大鼠的肝小叶间结缔组织很少，所以相邻肝小叶常连成一片，分界不

清。

肝细胞(Hepatocyte)是构成肝小叶的最主要成分，以中央静脉为中心呈放射状索条形排列，称之为肝细胞索(Hepatic Cord)。肝细胞索之间的空隙中有血液存在，称为肝血窦(Hepatic Sinusoid)。血液供给肝细胞总是从汇管区起始，终止于中央静脉，故又有门管小叶(Portal Lobule)的结构：即以汇管区为中心，相邻三个肝小叶的中央静脉为顶点的三角形区域[2]。

二、　肝硬化(Liver Cirrhosis, LC)

肝硬化是以肝脏纤维结缔组织弥漫性增生并伴有肝细胞的结节状再生为特点的病变，这是由于当肝脏受致病因素的作用后，肝细胞出现变性、坏死，伴有炎性反应，进而发生肝细胞再生，在病变区发生胶原纤维的异常增生，最后导致肝小叶结构被破坏和血管改建，肝脏出现变形、体积变异、质地变硬。肝脏仅有胶原纤维(Collagenous Fiber)增生，而无肝细胞结节存在时则不能称之为肝硬化；反之，如仅有肝细胞结节，而无胶原纤维增生，也不是肝硬化[2]。

胶原纤维的主要成分是胶原蛋白，目前至少有 19 型胶原蛋白，占人体蛋白总量的 1/3，在肝脏内约占蛋白总量的 5%-10%[32]。当肝脏发生纤维化时，胶原蛋白可增加到 50%，如正常每克肝组织中含胶原 5.5mg，肝硬化时可高达 30mg，而肝组织中至少有 6 种不同类型的胶原——即Ⅰ～Ⅵ，其中以Ⅰ、Ⅲ型为主。Ⅰ型胶原主要发现在汇管区和末梢肝静脉周围成熟的胶原；Ⅲ型胶原是肝窦周间隙的网状纤维。在正常大鼠的肝组织中，Ⅰ、Ⅲ型胶原发布在汇管区的结缔组织、血管壁及胆管壁，在肝实质内沿肝窦壁形成纤维的丝状着色；肝硬化时则明显增多，还可发布于从汇管区向肝实质内伸展的纤维隔[33]。

临床上，大多数的肝硬化患者均伴有不同程度的肝门静脉高压症。

§ 1.1.2 肝门静脉系统与肝门静脉高压症

肝门静脉系统，由肝门静脉及其属支组成，主要机能是将消化道吸收的物质运输至肝，在肝内进行合成、分解、解毒、贮存，故肝门静脉可以看作肝的功能性血管。肝门静脉不同一般静脉，其回流的起始端和分支末端都与毛细血管相连，而且主支及其分支内缺少功能性的静脉瓣，因此，肝门静脉压力过高时，血液易发生倒流

肝门静脉主要有以下几个属支（图 1-2[1]）：肠系膜上静脉、肠系膜下静脉、脾静脉、胃左静脉、胃右静脉、胆囊静脉和附脐静脉。另外，肝门静脉系与上、

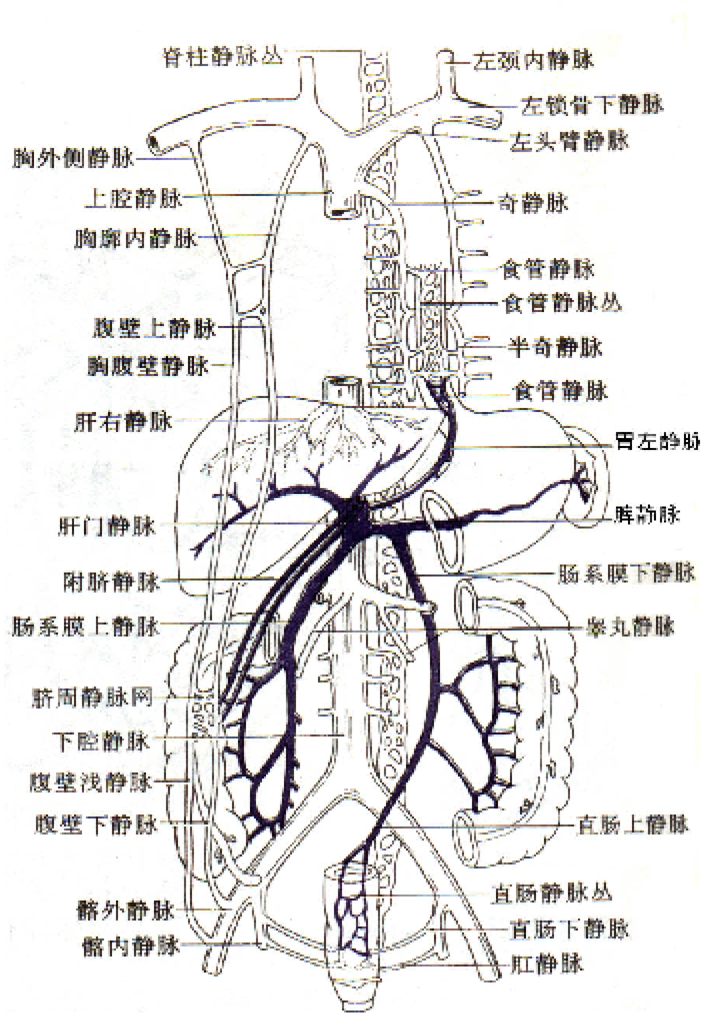


图 1-2 肝门静脉系与上、下腔静脉系间的吻合（模式图）

下腔静脉系之间存在丰富的吻合，在肝门静脉因病变而回流受阻时，通过这些吻合支形成侧支循环途径，因此，肝门静脉与上、下腔静脉的吻合有重要的临床意义，其主要的吻合部位包括：食管静脉丛、直肠静脉丛、脐周围静脉网、脊柱静脉丛等[1]。

正常情况下，肝门静脉系和上、下腔静脉系之间的交通支细小，血流量少，各属支分别将血液由脏器引流向所属的静脉系。一旦肝门静脉回流受阻（如肝硬变等），就会导致门静脉高压症，由于肝门静脉缺少功能性瓣膜，致使其中的血液可以逆流，并通过上述诸吻合途径建立侧支循环，分别经上、下腔静脉回流入心，进而，造成吻合部位的细小静脉曲张，甚至破裂（如食管静脉丛曲张、破裂，造成呕血）。另一方面，大量门静脉血在未进入肝脏前就直接经交通支进入体循环，使得经消化管吸收的有毒物质、代谢分解产物、药物等未能运至肝脏进行解毒或分解，造成积聚中毒，引发全身性的病变[2]（如门静脉高压症会影响胃液分泌，降低胃部粘液对胃的保护作用[3]）。PHT 最常见的并发症有腹壁和食管、胃底静脉曲张，充血性脾肿大和脾功能亢进，肝功能失代偿，腹水和肝性脑病[4,5]。其中，食管胃底静脉曲张破裂出血死亡率可高达 40%左右[2]。

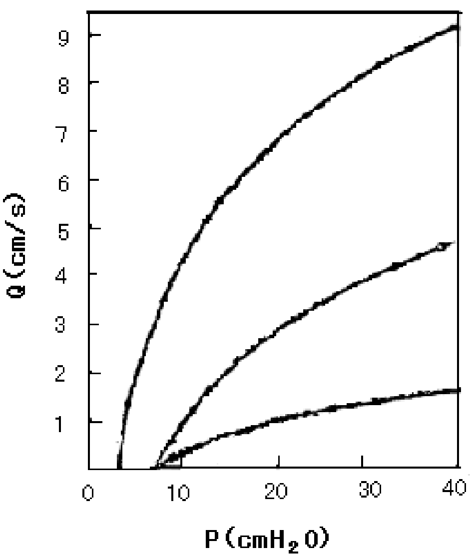
PHT 的主要发病原因是肝硬化。由于我国乙型肝炎的病毒感染率很高，因而 PHT 的发病率明显高于欧美发达国家[6]。所以，对于 PHT 的防治与研究，理应引起特殊的重视。

§ 1.2 门静脉高压症血液动力学研究的若干成果

近年来，门静脉血流动力学的研究，已经从单一的门静脉压力和流量测量，逐步渗透到了 PHT 的病理性研究，腹水成因与治疗，食管胃底静脉曲张出血的预测与预防，肝性脑病的防治和 PHT 治疗方法的选择等各个方面。血液动力学检测结果已成为评价降肝门静脉压药物疗效的金标准[2]，如静脉曲张压力的测量值可以充分反映心得安(Propranolol，一种β-受体阻滞剂，可以降低肝门静脉压力)对门静脉高压症的治疗作用[16]。

实验表明，肝门静脉高压动物模型的门静脉管壁增厚，使血管顺应性下降，从而增加血管阻力。另一方面，肌层肥厚可使收缩力增强，亦可增加门静脉压力。因而，对于门静脉系统压力—流量关系的研究是门静脉系统血液动力学研究的一个重要方面。

我国学者在这方面作了很好的工作。例如朱樑等[18,19]关于肝循环门静脉系统流导、阻力的研究和离体兔肝门静脉系统顺应性的研究。他们对兔离体肝脏的门静脉系统在门静脉狭窄、肝内阻塞、肝动脉压改变及对照状态下进行了血液动力学方面的动态测量和分析，得到了在这三种状态下肝脏门静脉系统的压力-流量曲线[18]（图 1-3），下面以该曲线为例予以说明。通过流量 Q 随压力 P 的变化规律，可以反映出脏器组织的生理特性以及在病理状态下的变化。从曲线可以看出，随着门静脉压力增大，流导即流量变化率与压力变化率的比（$\Delta Q/\Delta P$）显着变小。也就是说，在曲线上可找到这样一部分：在这段范围内，压力变化很明显，而相应的流量却变化不十分明显。这一点对于手术治疗门静脉高压症有指导性意义，例如可在门静脉高压症分流手术中根据流量压力关系的这样一个特点用血液动力学方法计算出最佳吻合口径。此外，依然在上述三种状态下，他们又测定了肝脏门静脉系统的流导曲线（C-P）和阻力曲线（R-P）[19]。阻力曲线总的变化趋势是随压力增大而先下降，达到一定值后阻力最小，此时管道畅通，再后压力继续增大时，流动阻力有所上升。因此，病理上看，在发生门静脉高压症时，往往是由肝中



图中三条曲线，自上到下分别代表：

D=3.58mm、2.80mm 和 1.59mm

图 1-3 不同程度门静脉狭窄对于压力（P）流量（Q）曲线的影响

阻力升高所致。

郑恩涛等[20,21]对肝硬变时肝内门静脉系统顺应性进行了研究，结果表明顺应性下降，说明肝内血管床出现“刚性化”趋势，而其固有的循环顺应性则近乎丧失[20]。他们还就门静脉系统自身调节及其本构关系做了初步的观察，将门静脉系统看作以门静脉主干为中心呈不对称的哑铃状分布，其力学特性可等同于一个开放的、连体球状的粘弹性腔，功能相对独立，随后分析了在正常状态下和门静脉高压症情况下此模型的本构关系。正常状态下，门静脉系统肝侧的容积分布大于肠侧，门静脉系统容易通过扩展容积较大的肝内血管空间来增加整体顺应性，完成系统自身调节，此时高张状态是可逆的。然而，肝硬变时，肝内容积减少，门静脉系统自身调节能力受限或丧失，系统处于不可逆的高张持续状态，直至最终形成门静脉高压症[21]。

此外还有叶志义等[22]关于鼠肝门静脉残余应变的研究，即在肝门静脉零应力和无载荷状态下，计算其血管内外壁的残余应变。刘传绥等[23]关于限制性门腔静脉侧侧分流术的血液动力学与最佳吻合口径的选择的研究，得出门静脉压和肝侧门静脉血流停滞时的吻合口径及分流后门静脉降压率的散点图呈直线趋势。这些对于今后这方面工作的发展都是很好的基础。

§ 1.3 建立 PHT 血液动力学的整体生物力学模型

应该指出，肝门静脉系统是一个明显不同于其它静脉体系，具有整体调节功能的独立功能单位。在出现 PHT 时，门静脉的各主要属支内压力变化巨大，又是造成肝硬变并发症（如消化道出血和脾功能改变等）的直接原因。

目前，国内外有关 PHT 血液动力学研究的主要不足在于：大多局限于研究肝门静脉主干，而很少涉及门静脉系统的主要属支；局限于具体部位压力、流量的测量，而没有建立一个整体的理论模型加以统一分析。

一个有效的理论模型必须包含门静脉系统的各个主要属支，正确反映每一属支的本构关系及其相互关联，同时又要正确地反映门静脉系统在解剖、生理、病理上的独特特点。

建立一个能反映肝门静脉系统血液动力学特点的整体性生物力学模型，它应该包括门静脉主干，主要属支。根据实测数据建立可靠的关系式，正确反映正常生理条件下、PHT 病理条件的血液动力学改变，为 PHT 的机理研究和临床治疗决策提供有力的工具。

众所周知，动脉血流有很强的脉动性，通常用交流电路中的电阻，电感和电容等集中参数元件来比拟血流的阻力，惯性和血管的顺应性（分别称为流阻，流感和流容）。而门静脉系统的主要血管是静脉，静脉系统的血管缺少弹性，流容可以忽略，而且静脉血流流速较低，雷诺数也较低，因此惯性效应即流感也可以忽略。基于上面的考虑，我们用直流电路中的电阻来模拟肝门静脉系统主要血管和脏器。根据肝门静脉系统的解剖结构，我们可以将整个系统用串并联电路表示出来，并用流量 Q 来模拟电流、压力 p 模拟电压、流阻 R 来模拟电阻。事实上，我们可以根据测量到的血液动力学参数值 $\triangle p$、Q 来计算流阻 R，三者满足: $\triangle p=RQ$。于是，流阻就构成了我们肝门静脉系统的基本组件。

§1.4 血液流变学的研究方法及主要内容

血液流变学是研究血液流动和变形的科学，是生物医学同物理学和力学紧密相连的交叉学科。广义地讲，其研究的内容是：血液和血管的宏观与微观流变特性、规律及其在医学领域的应用。目前其具体研究的内容有：全血粘度、红细胞压积、红细胞的变形、红细胞的电泳率及纤维蛋白原含量的测定等等。其研究的方法主要是应用已知的血液流变学特性、规律和测量方法对具体疾病进行观测与研究，以期了解该疾病在血液流变学特性方面的变化，达到指导疾病防治的目的[2]。

目前临床上最常用的血液流变学参数有：

一、 全血粘度(Blood Viscosity）

全血粘度是指全血在流动时表现出的内摩擦力，反映血液流动的难易程度。全血是非牛顿流体，其值与切变率有显著的依赖关系，随着切变率的增加，全血粘度下降，而当切变率增加到一定值后，全血粘度趋于稳定，表现出牛顿流体的性质[34]；

二、 红细胞压积(Hemotocrit，HCT)

红细胞压积指的是红细胞占全血体积的百分率。在血液的有形成分中，红细胞(Red Blood Cell，RBC)的数量最多，是影响血液粘度的主要成分。在相同的切变率下，全血粘度随红细胞压积的增高而增大，且非牛顿液体性更显著。当红细胞压积超过 45%时，血液粘度随细胞压积以更大的幅度增加[34]；

三、 红细胞变形性(RBC’s Deformability)

红细胞变形性是指红细胞形状变化的能力，是影响高切变率下全血粘度的重要因素，也是在小血管通道中决定血液流动通畅性的重要因素；当红细胞因衰老或其它因素变形能力降低以后，会被脾脏中的巨噬细胞破坏[34]。在血液流变学中，常用不同切变率下的红细胞变形指数(Deformation Index, DI)来描述红细胞变形性；

四、　　血浆纤维蛋白原(Fibrinogen)

血浆纤维蛋白原一种纤维状蛋白质，是血浆中大分子蛋白之一。主要在肝脏合成中参与凝血过程。在凝血过程中，在凝血酶的作用下，转为纤维蛋白，形成纤维网，将血液中有形成分包罗起来而形成血块或血栓。因此，在出血性疾病和血栓性疾病的诊断时，常要测定血浆中的纤维蛋白原含量。从血液流变学角度分析，血浆纤维蛋白原浓度与血浆粘度呈正相关，从而与血液的全血粘度呈正相关[35]；

五、血红蛋白(Hemoglobin，HGB)

血红蛋白是一种含铁的蛋白色素，存在于脊椎动物的红细胞内，主要功能在于从肺运输氧气到全身各组织。红细胞中的血红蛋白是形成红细胞内粘度的基础，血红蛋白的含量与红细胞的内粘度成正比，并可影响红细胞的变形能力[35]

六、　　红细胞电泳率(Electrophoresis Rate)

红细胞电泳率是红细胞在恒定均匀电场作用下移动的速率，正比于红细胞表面负电荷的多少，而电荷的多少又直接影响红细胞的聚集性；红细胞的这种电子行为与膜表面结构及功能密切相关，是红细胞膜表面的一个重要生物物理特性[35]

§ 1.5 肝硬化血液流变学的研究现状

和 PHT 的血液动力学相比，与肝硬化有关血液流变学研究尚处于起步阶段，长期以来，人们在讨论肝硬化门静脉高压症的发生机制时，只注意到了肝血管床减少、变形及受压、肝内肝动脉-门静脉分流和胃、脾、肠等部位高循环血量等血流动力学因素，而忽视了血液流变学的影响[2]。根据 Poiseille 定律，血液的粘度、红细胞的变形能力和血小板的粘着能等，都将直接影响血液在肝脏微循环中的流过速度，而参与门静脉高压的形成。以前的一些有关血液流变学的研究主要限于肝硬化患者外周血的血液流变学参数的测定及其临床意义的研究。大多数研究认为，肝硬化时全血粘度、血浆粘度、红细胞聚集性等参数均高于正常对照组，红细胞变形能力明显低于正常对照组。以此为由，在肝硬化的治疗中辅以降低血液粘度、减少红细胞聚集等治疗，在一定程度上提高疗效。但也有研究认为，肝硬化时全血粘度等参数明显低于正常对照组，抗凝或活血化淤治疗必增加出血的危险性。另有少数研究认为，肝硬化时全血粘度与正常对照组间无显著性差异。上述结论不一致的原因主要是由于对影响血液流变学参数测定的诸多因素认识不足，在病例选择、实验设计等方面考虑不周所致[2]。

国内因受设备条件的限制，对红细胞变形能力的研究尚少，漆德芳等采用电镜观察红细胞异形性的方法，间接发现肝硬化患者红细胞变形能力下降，且这一下降与肝功能的减退有相关性[2]。

流体力学也告诉我们，流体的流量与流体的粘度呈负相关。所有这些都说

明，血液流变学因素参与了门静脉高压的形成，对此，我们尚了解甚少。1985年我国对脑血管病危险因素的大样本流行病学调查表明，肝硬化不在前10项危险因素之内，临床工作中也发现肝硬化患者，脑血管血栓的发病率甚低，而门静脉血栓并不少见[2]。这提示我们：门静脉血的血液流变学状态不同于体静脉血。开展门静脉血的血液流变学研究，必将有助于我们对肝硬化门静脉高压成因的再认识，同时，也有助于制定改善肝脏微循环、促进肝细胞再生、改善肝功能、降低门静脉压和抑制肝纤维化等进一步发展的治疗方法，为肝硬化门静脉高压症的治疗开创又一新的途径。

总之，在肝硬化血液流变学方面研究尚不多，当前的工作也仅限于观察，还没找到用于早期肝硬化诊断及肝硬化预后判断方面敏感而特异的方法，也还没能指导临床治疗取得重大突破[2]。

§ 1.6 本文的工作

本文的动物模型是让大鼠通过慢性乙醇中毒和反复接触某些化学物质如四氯化碳引起中毒性肝炎，最后演变为肝硬化。

我们首先制备出不同肝硬化程度的大鼠四氯化碳肝硬化模型，然后测量了正常及不同肝硬化程度情况下门静脉系统主要属支血管的直径、长度、血流量及压力等血液动力学参数，并且测量了全血粘度、红细胞压积、红细胞变形性、血浆纤维蛋白原、血红蛋白、红细胞电泳率等常见的血液流变学参数。此外我们还将鼠肝制成组织学切片，利用光学显微镜进行了肝脏的组织形态学观察。

利用所测得的全面的鼠肝门静脉系统血管的血液动力学数据，本文建立了以流阻为基本元件且能同时模拟正常状态及不同肝硬化程度的大鼠肝门静脉系统的整体生物力学模型，该模型可以求出其它无法直接测量的参数，并对门静脉高压症的发生做出合理解释。

根据血液流变学实验和组织形态学观察，我们首次发现：大鼠肝硬化所导致的血液流变学指标异常，出现在形态学上呈现出典型的假小叶这一肝硬化病态特征之前的 2~3 周，这个现象还未见国内外类似报道。

第二章　肝硬化大鼠门静脉系统血液动力学实验研究与整体生物力学模型的建立

§ 2.1 材料与方法

§ 2.1.1 实验动物

选用雌性健康 Wistar 大鼠 50 只，体重 350±25g，鼠龄 3^+个月（中国医学科学院实验动物所提供）。

§ 2.1.2 实验试剂

2.1.2.1　四氯化碳（CCl_4，分析纯）、金龙鱼牌食用花生油、无水乙醇（分析纯）

2.1.2.2　麻醉剂

§ 2.1.3 实验仪器

2.1.3.1　手术刀、镊子、止血钳、动物手术台、脱脂棉、麻醉剂、生理盐水
用于大鼠局部解剖

2.1.3.2　Rm6240A 多道生理记录仪
通过微小探针刺入血管，可精确记录血压

2.1.3.3　激光多普勒血流仪
敏感探头，主要用来记录血流量

2.1.3.4　游标卡尺
测量血管直径，用于计算血管内的流动阻力

§ 2.1.4 实验方法

2.1.4.1　肝硬化动物模型的建立

本文的动物模型是让大鼠通过慢性乙醇中毒和反复接触某些化学物质如四氯化碳引起中毒性肝炎，最后演变为肝硬化。所有大鼠随机分成阳性对照组和肝硬化组，阳性对照组的 10 只大鼠，每周 1、4 进行花生油皮下注射，0.12ml/100g 鼠重；肝硬化组又分成 7w 和 12w 组，每组各 15 只大鼠。肝硬化组大鼠以 60%的四氯化碳植物油，每周 1、4 进行皮下注射，0.30ml/100g 鼠重[24]；并每天饮用 10%的乙醇自来水（乙醇采用分析纯）。在用药后的第 7w 和 12w 将鼠麻醉，活体局部解剖，检测肝门静脉系统主要属支血液动力学参数的变化情况

2.1.4.2　血液动力学指标的测量

（1）　血流量的测量

将麻醉后的大鼠胸腹部向上平放于手术台上，将肝区对应的腹部皮肤剪开，暴露肝门静脉系统的主要血管及分支。将激光多普勒血流仪的敏感探头轻轻接触肝门静脉系统各主要血管，从仪器中记录下每分钟血流量，并根据大鼠体重换算为每 100g 每分钟血流量 Q(ml/m/100g)。

（2） 主要血管直径的测量

使用游标卡尺测量活体充血状态下，大鼠肝门静脉系统主要血管的直径和长度，进而计算血管内的阻力。

（3） 部分主要属支血流压力的测量

在测量血流量和血管直径之后，将 Rm6240A 多道生理记录仪的微小探针直接插入大鼠肝门静脉系统的主要较大的血管：肝门静脉、下腔静脉、脾静脉、胃静脉、肠静脉和腹主动脉中，读出血压值。由于其它分支过于细小，测量有困难，故只测量了上述几个主要血管。

§ 2.2 实验结果

§ 2.2.1 血流量测量的实验结果（$s \pm x$）

这里血流量单位取的是平均 100g 组织每分钟的血流量。(s: 均值；x：标准差，下同)

表 2-1

	血流量（ml/min/100g）		
血管或脏器	阳性对照组	肝硬化 7 周*	肝硬化 12 周
肝脏	245.8±27.1	216.3±22.4	209.1±21.7
肝门静脉	163.8±17.4	120.6±13.5	107.5±11.9
肝动脉	82.2±10.7	93.8±10.9	100.7±11.5
脾	58.2±6.0	98.9±11.4	247.7±28.1
脾静脉	53.8±6.1	96.3±10.4	217.8±23.2
胃	50.5±5.8	85.8±8.1	236.5±23.2
胃静脉**	48.7±5.7	193.3±23.2	233.9±26.0
肠	76.0±8.1	133.0±13.9	288.5±30.5
肠静脉	69.5±7.2	129.2±13.0	225.4±23.3

* 肝硬化 7 周指的是大鼠肝硬化模型在给药的第 7 周，以次类推，下同。

** 肝硬化时测量的是胃底曲张静脉，下同

§ 2.2.2 压力测量的实验结果（$s \pm x$）

表 2-2

	压力（kpa）		
血管	阳性对照组	肝硬化 7 周	肝硬化 12 周
腹主动脉*	12.82±1.54	9.04±1.12	7.32±0.97
肝门静脉*	1.02±0.15	2.08±0.27	3.69±0.44
下腔静脉**	0.09±0.01	0.13±0.02	0.15±0.02
脾静脉*	1.13±0.20	2.33±0.24	3.58±0.41
脾静脉**	2.57±0.44	3.20±0.39	3.92±0.50
胃静脉*	1.17±0.21	2.01±0.27	3.54±0.39
胃静脉**	2.67±0.22	2.44±0.19	3.87±0.47
肠静脉*	1.14±0.18	2.34±0.24	3.58±0.43
肠静脉**	2.64±0.37	3.09±0.22	3.78±0.44

*指血管出口端，**指血管入口端

§ 2.2.3 血管内流阻 $\overline{R}$ 的实验结果

本文是通过测量部分血管的长度 L 和直径 D，利用公式 $\overline{R}=128\mu L/(\pi D^4)=0.15939L/D^4$ 来求得血管内的阻力[25]，为了与真正的流阻 R 相区别，我们用 $\overline{R}$ 来表示。这里 $\mu = 3.91 mPa \cdot m$。

表 2-3

	D(cm)			L(cm)			$\overline{R}$ ($\times 10^{11}$N×s/m^5)		
	阳性对照组	肝硬化 7 周组	肝硬化 12 周组	阳性对照组	肝硬化 7 周组	肝硬化 12 周组	阳性对照组	肝硬化 7 周组	肝硬化 12 周组
门静脉	0.262±0.022	0.199±0.019	0.195±0.020	1.036±0.120	1.530±0.155	1.591±0.158	0.0003504	0.001555	0.001754
肝动脉	0.071±0.005	0.076±0.009	0.081±0.008	0.991±0.087	0.973±0.098	0.976±0.081	0.06216	0.04649	0.03614
脾动脉	0.112±0.018	0.128±0.022	0.169±0.009	2.006±0.231	1.998±0.314	1.992±0.237	0.02032	0.01186	0.003892
脾静脉	0.126±0.014	0.148±0.021	0.211±0.017	1.828±0.198	1.825±0.114	1.826±0.133	0.01156	0.006063	0.001468
胃动脉	0.103±0.008	0.119±0.025	0.158±0.023	1.664±0.180	1.645±0.175	1.648±0.177	0.02357	0.01308	0.004215

胃静脉	0.113±0.012	0.207±0.025	0.223±0.029	1.685±0.143	1.683±0.125	1.686±0.128	0.01647	0.001461	0.001087
肠动脉	0.108±0.023	0.116±0.029	0.160±0.037	1.134±0.098	1.128±0.189	1.129±0.115	0.01329	0.009930	0.002736
肠静脉	0.114±0.009	0.153±0.189	0.208±0.133	1.191±0.063	1.187±0.114	1.185±0.102	0.01123	0.003453	0.001009

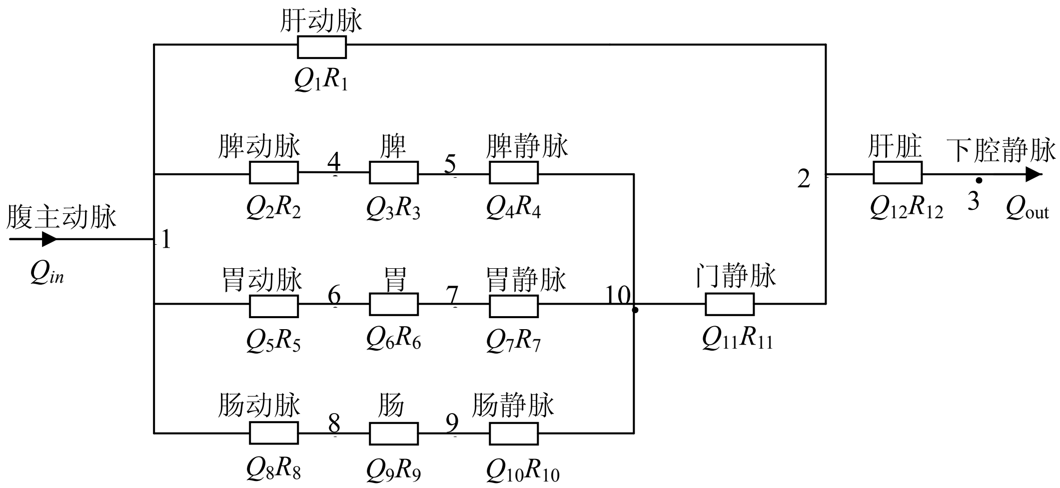


图 2-1　正常情况下肝门静脉系统整体模型

§ 2.3 正常情况下的大鼠的肝门静脉系统整体生物力学模型

§ 2.3.1 正常情况下门静脉系统整体模型的几点说明

（1） 从表 2-1 看到，胃与胃静脉、脾与脾静脉、肠与肠静脉之间的血流量相差不多，都是脏器的血流量比血管略高一点，这也与门静脉系统整体的解剖结构相符，因为从胃、脾、肠这些脏器流出的血液除了主要进入胃静脉、脾静脉和肠静脉之外，还有一小部分血液会进入一些微小的毛细血管，在误差允许的范围之内，这部分血液可以忽略不记。因此，我们近似的将胃动脉、胃和胃静脉串联；脾动脉、脾和脾静脉串联；肠动脉、肠和肠静脉串联；

（2） 根据门静脉系统的解剖结构，以及我们测量的血流量数据，从胃静脉、脾静脉和肠静脉流出的血液均汇入到肝门静脉，之后与肝动脉流出的血液共同汇入到肝脏，因此我们（1）中串联后的三条线路并联，之后与肝门静脉串联，再与肝动脉并联，最后与肝脏串联起来，这中间仍忽略了一些细小的交通支以及结点 10 处的压力差异；

（3） 从表 2-2 可以看出，从腹主动脉、胃静脉/脾静脉/肠静脉、肝门静脉到下腔静脉，压力值是逐渐递减的，而图 2-1 同样满足此规律；

（4） 从表 2-1 到 2-3 看到，当肝硬化程度加深到一定程度时，形成侧支循环，这时的整体模型跟未形成侧支循环时的模型应该有所不同。

§ 2.3.2 正常情况下门静脉系统中无法直接测量的血液动力学参数的求解

根据节点处质量守恒，我们有：

$$P_1 - P_2 = Q_1 R_1 \quad (2\text{-}3\text{-}1)$$

$$P_2 - P_3 = Q_{12} R_{12} \quad (2\text{-}3\text{-}2)$$

$$P_1 - P_4 = Q_2 R_2 \quad (2\text{-}3\text{-}3)$$

$$P_4 - P_5 = Q_3 R_3 \quad (2\text{-}3\text{-}4)$$

$$P_5 - P_{10} = Q_4 R_4 \quad (2\text{-}3\text{-}5)$$

$$P_1 - P_6 = Q_5 R_5 \quad (2\text{-}3\text{-}6)$$

$$P_6 - P_7 = Q_6 R_6 \quad (2\text{-}3\text{-}7)$$

$$P_7 - P_{10} = Q_7 R_7 \quad (2\text{-}3\text{-}8)$$

$$P_1 - P_8 = Q_8 R_8 \quad (2\text{-}3\text{-}9)$$

$$P_8 - P_9 = Q_9 R_9 \quad (2\text{-}3\text{-}10)$$

$$P_9 - P_{10} = Q_{10} R_{10} \quad (2\text{-}3\text{-}11)$$

$$P_{10} - P_2 = Q_{11} R_{11} \quad (2\text{-}3\text{-}12)$$

$$Q_2 = Q_3 = Q_4 \quad (2\text{-}3\text{-}13)$$

$$Q_5 = Q_6 = Q_7 \quad (2\text{-}3\text{-}14)$$

$$Q_8 = Q_9 = Q_{10} \quad (2\text{-}3\text{-}15)$$

$$Q_{in} = Q_1 + Q_2 + Q_5 + Q_8 \quad (2\text{-}3\text{-}16)$$

$$Q_{11} = Q_2 + Q_5 + Q_8 \quad (2\text{-}3\text{-}17)$$

$$Q_{12} = Q_1 + Q_{11} \quad (2\text{-}3\text{-}18)$$

$$Q_{12} = Q_{\text{out}} \quad (2\text{-}3\text{-}19)$$

根据表 2-1 到 2-3，目前我们可以直接测量或间接测量（通过 D、L 计算）的量包含：

（1） 压力：腹主动脉压 P_1、肝门静脉压 P_2、下腔静脉压 P_3、脾静脉压 P_5、胃静脉压 P_7 和肠静脉压 P_9, P_{10}，多数动脉压和脏器的压力无法直接测得；

（2） 流量：肝动脉流量 Q_1, 脾流量 Q_3, 脾静脉流量 Q_4, 胃流量 Q_6, 胃静脉流量 Q_7, 肠流量 Q_9, 肠静脉流量 Q_{10}, 门静脉流量 Q_{11}, 肝脏流量 Q_{12}；

（3） 血管内流阻（通过 $\overline{R}$ =0.15939L/D^4 计算[25]）：肝动脉 $\overline{R}_1$，脾动脉 $\overline{R}_2$，脾静脉 $\overline{R}_4$，胃动脉 $\overline{R}_5$，胃静脉 $\overline{R}_7$，肠动脉 $\overline{R}_8$，肠静脉 $\overline{R}_{10}$，和门静脉 $\overline{R}_{11}$。

根据我们的已知量和（2-3-1）至(2-3-19)式，可以直接求出真实流阻 R 的有（2-3-1）、（2-3-5）、（2-3-8）、（2-3-11）和（2-3-12）式：

由（2-3-1）式，可以求出：R_1=0.1436（肝动脉） (2-3-20)

由（2-3-5）式，可以求出：R_4=0.02677（脾静脉） (2-3-21)

由（2-3-8）式，可以求出：R_7=0.03080（胃静脉） (2-3-22)

由（2-3-11）式，可以求出：R_{10}=0.02158（肠静脉） (2-3-23)

由（2-3-12）式，可以求出：R_{11}=0.0007326（门静脉） (2-3-24)

而其它未知量无法直接求得，为此，我们设真实流阻 R 和血管内流阻 $\overline{R}$ 满足线性关系：$R = c\overline{R}$　　(c 为修正系数) (2-3-25)

根据（2-3-20）至(2-3-25) 式，以及间接测量出来的 $\overline{R}_1$，$\overline{R}_4$，$\overline{R}_7$，$\overline{R}_{10}$ 和 $\overline{R}_{11}$，可分别求出修正系数 c_1=2.310, c_4=2.316, c_7=1.870, c_{10}=1.922 和 c_{11}=2.091, 进而求出修正系数 c 的均值及标准差：

$$c=2.102 \pm 0.1873 \qquad (2-3-26)$$

由式（2-3-1）到（2-3-26），可以求出图 2-1 中涉及的其它血管、脏器的血液动力学参数。

（1） 流量（ml/min/100g）

Q_2 =58.2　（脾动脉）

Q_5=48.7　（胃动脉）

Q_8=76.0　（肠动脉）

（2） 压力（kpa）

P_4=10.30　（脾）

P_6=10.29　（胃）

P_8=10.67　（肠）

（3） 流阻(kpa×min×100g/ml)

R_2=0.04271（脾动脉）

R_3=0.1312　（脾）

R_5=0.04954（胃动脉）

R_6=0.1491　（胃）

R_8=0.02087（肠动脉）

R_9=0.1061　（肠）

R_{12}=0.003739（肝脏）

§2.4 肝硬化情况下的大鼠的肝门静脉系统整体模型

§2.4.1 肝硬化 7 周

图 2-2 是肝硬化 7 周时的大鼠门静脉系统整体模型。从表 2-2 可以看出，肝硬化 7 周时，胃静脉压力比门静脉压力还要低，使胃静脉出现回流障碍，因而循环发生改变，可造成胃底静脉曲张出血，这部分血流绕过肝脏而直接回心，是门静脉高压症引发的一个主要的侧支循环，因此，在这里，我们将胃底曲张静脉与门静脉并联，来表示该侧支循环。

根据表 2-1 到 2-3，目前我们可以直接或间接测量的量包含：$P_1, P_2, P_3, P_5, P_8, P_9, P_{10}, Q_1, Q_3, Q_4, Q_6, Q_7, Q_9, Q_{10}, Q_{11}, Q_{12}$，$\overline{R}_1$，$\overline{R}_2$，$\overline{R}_4$，$\overline{R}_5$，$\overline{R}_7$，$\overline{R}_8$，$\overline{R}_{10}$，$\overline{R}_{11}$。

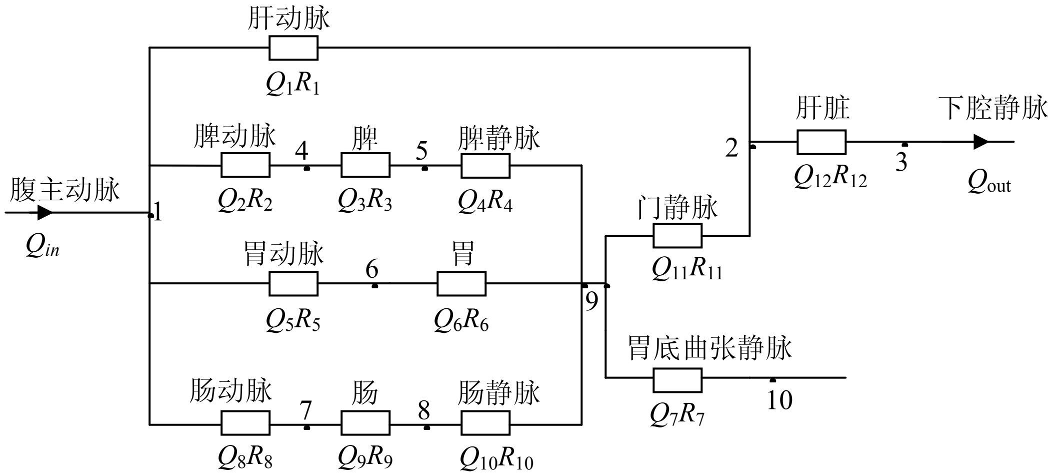


图 2-2　肝硬化 7 周时肝门静脉系统整体模型

根据节点处质量守恒，我们有：

$$P_1 - P_2 = Q_1 R_1 \tag{2-4-1-1}$$

$$P_2 - P_3 = Q_{12} R_{12} \tag{2-4-1-2}$$

$$P_1 - P_4 = Q_2 R_2 \tag{2-4-1-3}$$

$$P_4 - P_5 = Q_3 R_3 \tag{2-4-1-4}$$

$$P_5 - P_9 = Q_4 R_4 \tag{2-4-1-5}$$

$$P_1 - P_6 = Q_5 R_5 \tag{2-4-1-6}$$

$$P_6 - P_9 = Q_6 R_6 \tag{2-4-1-7}$$

$$P_9 - P_{10} = Q_7 R_7 \tag{2-4-1-8}$$

$$P_1 - P_7 = Q_8 R_8 \tag{2-4-1-9}$$

$$P_7 - P_8 = Q_9 R_9 \tag{2-4-1-10}$$

$$P_8 - P_9 = Q_{10} R_{10} \tag{2-4-1-11}$$

$$P_9 - P_2 = Q_{11} R_{11} \tag{2-4-1-12}$$

$$Q_2 = Q_3 = Q_4 \tag{2-4-1-13}$$

$$Q_5 = Q_6 \tag{2-4-1-14}$$

$$Q_8 = Q_9 = Q_{10} \tag{2-4-1-15}$$

$$Q_{in} = Q_1 + Q_2 + Q_5 + Q_8 \tag{2-4-1-16}$$

$$Q_{11} + Q_7 = Q_2 + Q_5 + Q_8 \tag{2-4-1-17}$$

$$Q_{12} = Q_1 + Q_{11} \tag{2-4-1-18}$$

$$Q_{12} = Q_{out} \tag{2-4-1-19}$$

根据我们的已知量和（2-4-1-1）至(2-4-1-19)式，可以直接求出真实流阻 R

的有（2-4-1-1）、（2-4-1-5）、（2-4-1-8）、（2-4-1-11）和（2-4-1-12）式：

由（2-4-1-1）式，可以求出：R_1=0.07420（肝动脉） (2-4-1-20)

由（2-4-1-5）式，可以求出：R_4=0.009034（脾静脉） (2-4-1-21)

由（2-4-1-8）式，可以求出：R_7=0.002224（胃静脉） (2-4-1-22)

由（2-4-1-11）式，可以求出：R_{10}=0.005805（肠静脉） (2-4-1-23)

由（2-4-1-12）式，可以求出：R_{11}=0.002073（门静脉） (2-4-1-24)

类似§ 2.3，我们依然设真实流阻 R 和血管内流阻 $\overline{R}$ 满足线性关系：

$$R = c\overline{R} \qquad (c \text{ 为修正系数}) \qquad (2\text{-}4\text{-}1\text{-}25)$$

根据（2-4-1-20）至(2-4-1-25) 式，以及间接测量出来的 $\overline{R}_1$，$\overline{R}_4$，$\overline{R}_7$，$\overline{R}_{10}$ 和 $\overline{R}_{11}$，可分别求出修正系数 c_1=1.596, c_4=1.490, c_7=1.523, c_{10}=1.681 和 c_{11}=1.333, 进而求出修正系数 c 的均值及标准差：

$$c=1.525 \pm 0.1162 \qquad (2\text{-}4\text{-}1\text{-}26)$$

由式（2-4-1-1）到（2-4-1-26），可以求出图 2-2 中涉及的其它血管、脏器的血液动力学参数。

（1）流量（ml/min/100g）

Q_2 =98.9 （脾动脉）

Q_5=85.8 （胃动脉）

Q_8=133.0 （肠动脉）

（2）压力（kpa）

P_4=7.255 （脾）

P_6=7.334 （胃）

P_7=7.016 （肠）

（3）流阻（kpa×min×100g/ml）

R_2=0.01809 （脾动脉）

R_3=0.04111 （脾）

R_5=0.01995 （胃动脉）

R_6=0.05719 （胃）

R_8=0.01514 （肠动脉）

R_9=0.02937 （肠）

R_{12}=0.009039（肝脏）

§ 2.4.2 肝硬化 12 周

图 2-3 是肝硬化 12 周时的大鼠门静脉系统整体模型。从表 2-2 可以看出，肝硬化 12 周时，由于门静脉压力高于胃静脉、脾静脉和肠静脉的压力，使胃静脉、脾静脉和肠静脉出现回流障碍，因而循环发生改变，可能造成胃、脾及肠出

现高血流状态，严重的导致胃底静脉曲张出血。这时，应该形成比肝硬化 7 周时更为广泛的侧支循环，因此，在这里，我们将胃底曲张静脉、脾静脉、肠静脉同时与门静脉并联，来表示更为广泛的侧支循环。

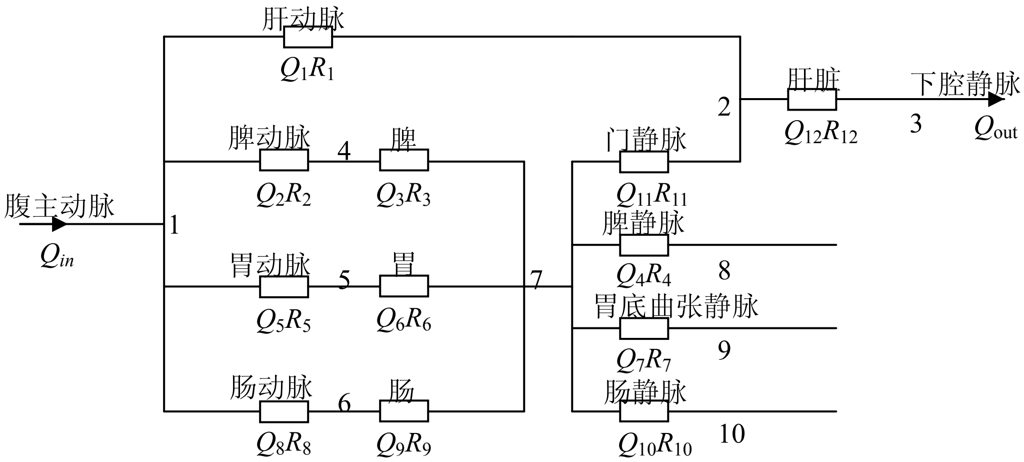


图 2-3　肝硬化 12 周时肝门静脉系统整体模型

根据表 2-1 到 2-3，目前我们可以直接或间接测量的量包含：$P_1, P_2, P_3, P_7, P_8, P_9, P_{10}, Q_1, Q_3, Q_4, Q_6, Q_7, Q_9, Q_{10}, Q_{11}, Q_{12}$，$\overline{R}_1$，$\overline{R}_2$，$\overline{R}_4$，$\overline{R}_5$，$\overline{R}_7$，$\overline{R}_8$，$\overline{R}_{10}$，$\overline{R}_{11}$。

根据节点处质量守恒，我们有：

$$P_1 - P_2 = Q_1 R_1 \tag{2-4-2-1}$$

$$P_2 - P_3 = Q_{12} R_{12} \tag{2-4-2-2}$$

$$P_1 - P_4 = Q_2 R_2 \tag{2-4-2-3}$$

$$P_4 - P_7 = Q_3 R_3 \tag{2-4-2-4}$$

$$P_7 - P_8 = Q_4 R_4 \tag{2-4-2-5}$$

$$P_1 - P_5 = Q_5 R_5 \tag{2-4-2-6}$$

$$P_5 - P_7 = Q_6 R_6 \tag{2-4-2-7}$$

$$P_7 - P_9 = Q_7 R_7 \tag{2-4-2-8}$$

$$P_1 - P_8 = Q_8 R_8 \tag{2-4-2-9}$$

$$P_6 - P_7 = Q_9 R_9 \tag{2-4-2-10}$$

$$P_7 - P_{10} = Q_{10} R_{10} \tag{2-4-2-11}$$

$$P_7 - P_2 = Q_{11} R_{11} \tag{2-4-2-12}$$

$$Q_2 = Q_3 \tag{2-4-2-13}$$

$$Q_5 = Q_6 \tag{2-4-2-14}$$

$$Q_8 = Q_9 \tag{2-4-2-15}$$

$$Q_{in} = Q_1 + Q_2 + Q_5 + Q_8 \tag{2-4-2-16}$$

$$Q_{11} + Q_7 + Q_4 + Q_{10} = Q_2 + Q_5 + Q_8 \tag{2-4-2-17}$$

$$Q_{12} = Q_1 + Q_{11} \tag{2-4-2-18}$$

$$Q_{12} = Q_{out} \tag{2-4-2-19}$$

根据我们的已知量和（2-4-2-1）至(2-4-2-19)式，可以直接求出真实流阻 R 的有（2-4-2-1)、（2-4-2-5)、（2-4-2-8)、（2-4-2-11）和（2-4-2-12）式：

由(2-4-2-1)式，可以求出：R_1=0.03605（肝动脉） (2-4-2-20)

由(2-4-2-5)式，可以求出：R_4=0.001561（脾静脉） (2-4-2-21)

由(2-4-2-8)式，可以求出：R_7=0.001411（胃静脉） (2-4-2-22)

由(2-4-2-11)式，可以求出：R_{10}=0.0008873（肠静脉） (2-4-2-23)

由(2-4-2-12)式，可以求出：R_{11}=0.002140（门静脉） (2-4-2-24)

设真实流阻 R 和血管内流阻 $\overline{R}$ 满足线性关系：

$$R = c\overline{R} \qquad (c\text{ 为修正系数}) \tag{2-4-2-25}$$

根据（2-4-2-20）至(2-4-2-25) 式，以及间接测量出来的 $\overline{R}_1$，$\overline{R}_4$，$\overline{R}_7$，$\overline{R}_{10}$ 和 $\overline{R}_{11}$，可分别求出修正系数 c_1=1.000, c_4=1.063, c_7=1.298, c_{10}=0.880 和 c_{11}=1.220, 进而求出修正系数 c 的均值及标准差：

$$c=1.092 \pm 0.1507 \tag{2-4-2-26}$$

由式（2-4-2-1）到（2-4-2-26），可以求出图 2-3 中涉及的其它血管、脏器的血液动力学参数。

(1) 流量（ml/min/100g）

Q_2 =247.7 （脾动脉）

Q_5=236.5 （胃动脉）

Q_8=288.5 （肠动脉）

(2) 压力（kpa）

P_4=6.281 （脾）

P_5=6.245 （胃）

P_6=6.466 （肠）

(3) 流阻（kpa×min×100g/ml）

R_2=0.004250（脾动脉）

R_3=0.009645 （脾）

R_5=0.004603（胃动脉）

R_6=0.01017 （胃）

R_8=0.002988（肠动脉）

R_9=0.008728 （肠）

R_{12}=0.01716（肝脏）

§ 2.5 分析与讨论

§ 2.5.1 计算所得的其他血液动力学参数（只考虑均值）

（1） 流量

表 2-4

	血流量（ml/min/100g）		
血管	阳性对照组	肝硬化 7 周	肝硬化 12 周
脾动脉	58.2	98.9	247.7
胃动脉	48.7	85.8	236.5
肠动脉	76.0	133.0	288.5

（2） 压力

表 2-5

	压力（kpa）		
血管	阳性对照组	肝硬化 7 周	肝硬化 12 周
脾动脉*	10.30	7.255	6.281
胃动脉*	10.29	7.334	6.245
肠动脉*	10.67	7.016	6.466

*指血管末端，**指血管始端

（3） 真实流阻

表 2-6

	流阻 R(kpa×min×100g/ml)		
血管或脏器	阳性对照组	肝硬化 7 周	肝硬化 12 周
肝脏	0.003739	0.009039	0.01716
肝门静脉	0.0007326	0.002073	0.002140
肝动脉	0.1436	0.07420	0.03605
脾	0.1312	0.04111	0.009645
脾动脉	0.04271	0.01809	0.004250
脾静脉	0.02677	0.009034	0.001561
胃	0.1491	0.05719	0.01017
胃动脉	0.04954	0.01995	0.004603
胃静脉	0.03080	0.002224	0.001411
肠	0.1061	0.02937	0.008728
肠动脉	0.02087	0.01514	0.002988
肠静脉	0.02158	0.005805	0.0008873

§ 2.5.2 分析与讨论

1．大鼠肝硬化前后门静脉系统血流量比较：

（1） 如表 2-1 所示，肝硬化时门静脉的血流量要比正常时有所降低，肝硬化程度越深，门静脉血流量越少。这是因为肝硬化时门静脉血管阻力有所增加，而且压力剧增，超过胃静脉、脾静脉及肠静脉，致使胃静脉、脾静脉和肠静脉出现回流障碍，形成侧支循环，降低了门静脉血流量。

（2） 如表 2-1 所示，肝硬化情况下，大鼠肝动脉血流量明显升高，并随程度的加重，呈递增趋势，而门静脉入肝血流明显下降，总肝血流量明显减少，这说明也是因为血管阻力的存在，门静脉血流量减少，从而影响了肝脏的血供，而且门静脉高压症伴有门静脉侧支循环开放，有部分血流绕过肝脏而直接回心，同时肝动脉与门静脉血流有相互代偿作用的特性，以维持肝脏血液供应，进一步表明门静脉高压时内脏小动脉扩张的存在[26]。

（3） 如表 2-1、2-4 所示，在肝硬化 7 周和 12 周胃动脉、胃以及胃静脉流量剧增，并导致了不同程度的胃底静脉曲张，这是因为门静脉血管阻力增加导致侧支循环的建立，流入胃静脉和胃的血流量成倍增加，严重的还会导致胃底静脉曲张破裂出血[25,27]。

（4） 从表 2-1、2-4 可以看出，肝硬化情况下脾动脉、脾及脾静脉的血流量也有较大幅度增加，同样是由门静脉血管阻力增加导致侧支循环的形成而引起的，使得脾静脉的血流量激增，可导致充血性脾肿大和脾功能亢进等疾病[29]。

（5） 随着肝硬化程度的加深，肠动脉、肠静脉和经过肠的血流量都有明显的增加，有利的证明了肝硬化时肠系膜高动力循环的存在[8,27-28]，而且肝硬化程度越高，肠系膜高动力循环越明显。

（6） 流经主要脏器的血流量变化还可以从神经学的角度来解释：由于门静脉入肝血流量的减少引起肝窦灌注压下降，可激发肝至内脏血管床的反馈机制，从而兴奋内脏交感神经，引起内脏毛细血管前微动脉扩张，导致内脏血流量代偿性增加，以弥补门静脉血流的减少[30]。

2．大鼠肝硬化前后门静脉系统压力比较：

（1） 从表 2-2 可以看出，肝硬化程度越高，肝门静脉的压力就越大，在肝硬变较严重的情况下，压力可升至正常时的 3 倍多，所以说肝硬化是门静脉高压症的最常见病因，这也与以往的研究结果相符[2,5,6,14,19,24]；

（2） 从表 2-2、2-5 可以看出，在门静脉高压的影响下，下腔静脉、胃静脉、脾静脉和肠静脉的压力值总的趋势也是随肝硬化程度的加深而增加；

（3） 从表 2-2 可以看出，在门静脉高压时（如肝硬化 12 周），门静脉压力高于

胃静脉、脾静脉和肠静脉的压力，使胃静脉、脾静脉和肠静脉出现回流障碍，因而循环发生改变，可能造成胃、脾及肠出现高血流状态，严重的导致胃底静脉曲张出血、充血性脾肿大等疾病[27-29]；

（4） 从表 2-2、2-5 可以看出，肝硬化时，一些动脉的压力如腹主动脉、脾动脉、胃动脉及肠动脉反而有所降低，与以往文献报导中关于门静脉高压症时平均动脉压有所下降[26,31]相吻合。

3．大鼠肝硬化前后门静脉系统流阻比较：

（1） 从表 2-6 可以看出，肝硬化情况下门静脉及肝脏的流阻都有大幅度升高，其中门静脉的流阻为正常时的 3 倍左右，肝脏的流阻将近正常时的 5 倍，这与门静脉高压症形成理论十分吻合[2,25]；

（2） 从表 2-6 可以看出，肝硬化时门静脉系统的其他血管和脏器的流阻都有不同程度的下降，包括肝动脉、脾动脉、脾静脉、胃动脉、胃静脉、肠动脉、肠静脉、脾、胃、肠，这因为在肝硬化情况下，这些血管和脏器的血流量均有较大程度升高，导致血管直径增粗，流阻减少。

4．PHT 形成和维持的两个必要条件是内脏血流量的增加和门静脉血管阻力的增高[2,13,17]，这与我们的测量结果及由本模型计算所得的结果是十分吻合的。

5．本文测量的这些血管和脏器的血液动力学参数是迄今为止所给最全面的，以往的门静脉高压症血液动力学研究往往只局限于门静脉的血流量、压力的研究而忽略了整个门静脉系统的其它属支，由于门静脉血管的特殊性，它与周围的动静脉血管有着很丰富的吻合交通，所以建立一个整体的门静脉系统模型对于研究门静脉高压症及肝硬化的发病机制是十分必要的。本文根据所测量的大鼠门静脉系统的血液动力学参数，给出了正常时、肝硬化 7 周及肝硬化 12 周的大鼠肝门静脉系统整体模型，该模型与所测的数据基本吻合，并可以求出其他无法直接测量的参数，并对门静脉高压症的发生做出合理解释。

第三章 肝硬化大鼠血液流变学与病理学实验研究

§3.1 材料与方法

§3.1.1 实验动物

选用雌性健康 Wistar 大鼠 110 只，体重 350±25g，鼠龄 3^+个月（中国医学科学院实验动物所提供）。

§3.1.2 实验试剂

3.1.2.1 四氯化碳（CCl_4，分析纯）、金龙鱼牌食用花生油、无水乙醇（分析纯）

3.1.2.2 37～40%甲醛溶液（福尔马林）、二甲苯、中性树脂

3.1.2.3 苏木精-伊红染液、天狼猩红染液

3.1.2.4 肝素，蔗糖，生理盐水

3.1.2.5 15%PVP 溶液：（15g PVP，284mg Na_2HPO_4 ，68mg KH_2PO_4 ，0.38g NaCl，溶于 100ml 蒸馏水中，用 10%NaOH 调 pH 值至 7.4，渗透压为 300mOsm/Kg，粘度为 15mPa·s，MW=30Kda）

3.1.2.6 等渗 PBS：（140mM NaCl，2.7mM KCl，10mM Na_2HPO_4，1.8mM KH_2PO_4，pH7.4，295mOsm/kg）

3.1.2.7 琼脂盐桥：1g 琼脂溶于 100ml 生理盐水中，水浴煮沸，冷却成胶冻状，4°C 保存，备用

§3.1.3 实验仪器

3.1.3.1 光学显微镜（日本 Olympas 公司产品）

3.1.3.2 WGP-300 型隔水式电热恒温培养箱

3.1.3.3 1130/Biocut 切片机

3.1.3.4 北京产 LBY-N6A 型旋转式血液粘度计

3.1.3.5 压积管

3.1.3.6 3F-2 型多功能微量高速离心机（北京医用离心机厂产品）

3.1.3.7 LBY-BX2 型激光衍射仪（北京普利生公司产品）

3.1.3.8 F-820 血球计数仪（日本 Symex 公司产品）

3.1.3.9 细胞电泳仪 LIANG-100（复旦大学医学院产品）

§3.1.4 实验方法

3.1.4.1 肝硬化动物模型的建立

所有大鼠随机分成对照组和肝硬化组，对照组分正常鼠（10 只，不经任何处理）和阳性对照组（10 只，每周 1、5 进行花生油皮下注射，0.12ml/100g 鼠重）；肝硬化组又分成 2、4、5、7、8、10w 组，每组各 15 只大鼠。肝硬化组大鼠以 60%的四氯化碳植物油，每周 1、4 进行皮下注射，0.30ml/100g 鼠重[24]；并每天

饮用 10%的乙醇自来水（乙醇采用分析纯）。在用药后的第 2、4、5、7、8、10w 杀鼠，下腔静脉取血进行比较。

3.1.4.2　病理学观察

1．杀鼠取肝组织，肉眼观察形态上的变化，测量各组鼠肝重量；

2．将鼠肝制成组织学切片：

（1）取肝组织块，大小 1.0×0.5×0.5cm^3；

（2）组织块先放到福尔马林溶液（10%甲醛溶液）中固定 3 日以上，再用蒸馏水洗去甲醛；

（3）组织块梯度酒精脱水，即先用浓度为 60%的酒精浸泡 2 小时、再用 70%酒精浸泡 4 小时、接着用 80%酒精浸泡过夜、随后用 95%酒精分两次浸泡，各浸泡 45 分钟、然后用 100%酒精分两次浸泡，每次浸泡 20 分钟；

（4）将组织块用二甲苯透明，即将脱水后的组织块分两次浸泡到二甲苯溶液中，每次浸泡 20 分钟，以便接下来的石蜡可以充分溶解到组织内的二甲苯中；

（5）将组织块用石蜡包埋，以便切片；

（6）在石蜡切片机上切片，片厚 5-10μm。

3．对切片行苏木精-伊红（H-E）染色观察肝细胞的情况：

（1）烤干的石蜡切片经两次二甲苯脱蜡，每次 10 分钟；

（2）经两次无水乙醇洗去二甲苯，每次 8 分钟；

（3）经 95％、90％、80％、70％梯度酒精入水，每次 5 分钟；

（4）流水洗去酒精，入蒸馏水；

（5）入 Mayer 苏木精（染细胞核） 5 分钟，自来水冲洗蓝化；

（6）经蒸馏水后，入 1％伊红染液，染色 7 分钟；

（7）依次入蒸馏水、80％、90％、95％酒精各 2 分钟，并快速镜检染色效果；

（8）经两次无水乙醇脱水，每次 5 分钟，经两次二甲苯透明，每次 10 分钟；

（9）将玻片取出，擦去切片四周的二甲苯，滴加树胶，用盖片封好。

4．对切片行天狼猩红染色观察肝纤维变的情况：

（1）烤干的石蜡切片经两次二甲苯脱蜡，每次 10 分钟；

（2）经两次无水乙醇洗去二甲苯，每次 5 分钟；

（3）经 95％、90％、80％、70％梯度酒精后入水，每次 2 分钟；

（4）流水洗去酒精，入蒸馏水；

（5）入 1%天狼猩红溶液，37℃，30 分钟；

（6）入蒸馏水洗去浮色，依次入 70％、80％、90％、95％酒精各 2 分钟，并快速镜检染色效果；

（7） 经两次无水乙醇脱水，每次 10 分钟，经两次二甲苯透明，每次 10 分钟；

（8） 将玻片取出，擦去切片四周的二甲苯，滴加中性树胶，盖片封固。

3.1.4.3 血液流变学指标的测量

1. 全血粘度的测量

从大鼠下腔静脉取血，肝素抗凝；取 1 ml 血样用北京产 LBY-N6A 型旋转式血液粘度计测取切变率为 10 s^{-1}、100s^{-1} 下的全血粘度值；每只鼠取三个血样，测量三次，结果取平均值。

2. 红细胞压积的测定

抗凝后的血样通过毛细作用流入压积管内，吸至 3/4~4/5 管即止，取血端用橡皮泥封口，将毛细管放到西安产 3F-2 型多功能微量高速离心机平面转盘毛细管槽内，对准序号，对称放置，10000rpm 离心 5 分钟；用红细胞压积测量尺测量各管内的红细胞压积；每只鼠的血样取三管，测量结果取平均值。

3. 血浆纤维蛋白原含量的测定

按照 2 的办法离心后，分离出血浆和血细胞。然后将毛细管置于 56℃的水浴中加热 5 分钟，以待纤维蛋白原析出，再进行 10000rpm 离心 5 分钟，读取血浆中沉淀物刻度，即可算出血浆纤维蛋白原含量；每只鼠的血样取三管，测量结果取平均值。

4. 红细胞计数与血红蛋白含量的测定

在 F-820 血球计数仪上对血样进行红细胞计数血红蛋白含量的测定

5. 红细胞变形指数的测量

取 20 μl 全血与 2.5ml 的 15%PVP 均匀混合，制成红细胞悬浮液；吸取 600μl 悬浮液放入北京产 LBY-BX2 新型激光衍射仪，分别测定切变率 $\dot{\gamma} = 50s^{-1}$ 和 $\dot{\gamma} = 1000s^{-1}$ 下的红细胞变形指数 DI 及红细胞总变形指数 IDI。

6. 红细胞电泳率的测定

（1） 离心收集细胞，用生理盐水清洗一次（1000rpm，5min），弃上清；

（2） 用 9%（w/v）蔗糖溶液将细胞配成 2×10^6/ml 的悬液；

（3） 测定静止层：将注入水的长方形毛细管安放在电泳小室槽，电泳小室槽安装在载物台上，借助目镜测微器，在低倍镜下找到从前壁线到后壁线的 1/10 距离为静止层，以下的测量均在静止层上进行；

（4） 将细胞悬液通过毛细作用注入电泳小室，安装在电泳小室槽内，两端连上琼脂盐桥后，安装在载物台上；

（5） 每次测量选定 10 个细胞，测量其在 30℃、40V 的电压下，移过

2 格（每格 165μm）一个来回的时间，求 10 个细胞的平均时间，并计算电泳率；每个细胞样品测量 3 次，将得到的电泳率求平均值和标准差；

§ 3.2 测量结果

§ 3.2.1 病理学方面的测量结果

3.2.1.1 大鼠体重的变化

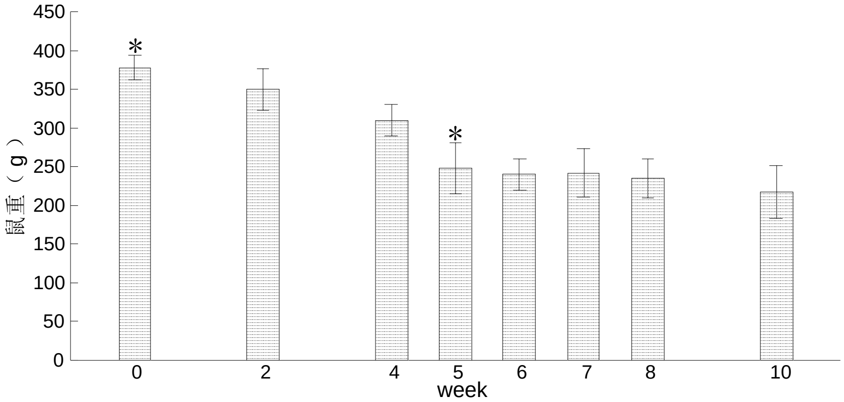


图 3-1 大鼠体重（*P<0.05）随肝硬化时间的变化

从图 3-1 中可以看到，随着肝硬化程度的加深，大鼠体重下降，5 周之前下降迅速，4 周体重即出现较为明显的降低，5 周（week=5）肝硬化组体重显著降低（与正常对照组的组间 t 检验 P<0.05），之后趋于平缓下降。

3.2.1.2 肝脏组织形态学变化肝脏的肉眼形态学观察

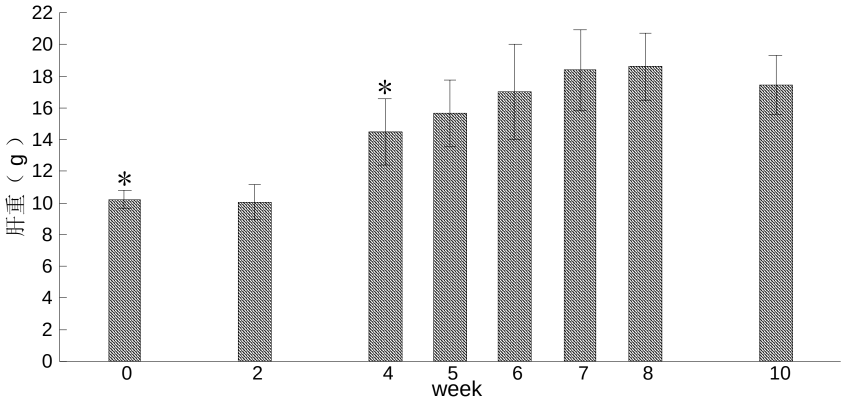


图 3-2 大鼠肝重（*P<0.05）随肝硬化时间的变化

（图 3-3~图 3-6 见第 117 页“附图”）

（1） 从图 3-2 和图 3-3 可以看出，正常大鼠的肝脏呈紫红色，分多叶，边缘薄锐，表面湿润光滑，肝门静脉略充盈，肝重 10.2±0.56g。

（2） 肝硬变 2 周组大鼠的肝脏与正常鼠肝未见明显差异，肝重 10.1±1.12g。

（3） 随着实验的进程，如图 3-2 和图 3-4 所示，肝硬变 4 周组（与正常

对照组的组间 t 检验 $P<0.05$）大鼠的肝脏的体积和重量明显增大，肝重 12.6±1.67g 呈不均匀的暗红色，边缘较薄锐，表面有明显的纤维样结构，肝门静脉明显充盈；

（4） 到了肝硬化 7 周，如图 3-2 和 3-5 所示，大鼠的肝脏明显增大，重量可达正常时的两倍，重 18.45±2.55g，呈不均匀的暗红色，边缘开始出现钝圆，表面有明显的纤维样结构，肝脏硬度增加；

（5） 如图 3-2 和 3-6 所示，肝硬变 10 周组鼠肝较苍白，边缘明显钝圆，表面可见大小不一的细小结节，并与周围的组织的粘连较重，肝门静脉充盈及增粗明显，肝脏较 7 周鼠肝略有缩小，重 17.44±1.90g。

3.2.1.3 肝脏的组织形态学观察

（图 3-7~图 3-18 见第 118-119 页“附图”）

从图 3-7~图 3-18 中，可以看到：

（1）大鼠 2 周肝硬化组的肝组织结构基本正常，仅在汇管区周围的肝细胞出现少量的脂肪变；

（2）肝硬化 4～6 周组的肝小叶结构仍基本正常，肝小叶内肝细胞出现脂肪变，并可见坏死的肝细胞以及肝细胞的分裂像，汇管区和肝索内胶原纤维增生；

（3）7～10 周肝硬化组肝小叶结构出现异常，甚至已没有了正常的肝小叶结构，而是被汇管区和中央静脉区大量增生的Ⅰ、Ⅲ型胶原纤维（在天狼腥红组化染色中，偏振光显微镜下，Ⅰ型胶原呈红色，Ⅲ型胶原呈绿色）相互联接形成的纤维隔所分割，形成大小不等的肝细胞团块，称为假小叶。脂肪变性的肝细胞相对减少，但坏死的肝细胞明显增多，已呈现典型的肝硬化。

§ 3.2.2 血液流变学方面的测量结果

3.2.2.1 红细胞指标的变化图表

表 3-1 各组间的血液流变学参数值（$s\pm x$）

组别	红细胞计数 (10^{12})	血红蛋白 (g/L)	红细胞压积（%）	纤维蛋白原 (g/L)	全血粘度 (mPa.s) 10/s	100/s
正常组(normal)	7.55±1.10	13.44±1.33	51.36±2.03	2.60±0.72	10.54±1.32	5.22±0.36
对照组(control)	7.52±1.09	13.31±1.49	52.07±1.98	3.03±1.07	10.97±1.41	5.38±0.59
L2w*	7.68±1.44	12.55±1.76	42.05±1.55	2.87±0.85	10.33±1.40	3.87±0.55
L4w	7.70±1.28	12.22±1.45	36.21±1.23	2.24±0.63	9.80±1.36	3.92±0.71
L5w	6.81±1.69	11.94±1.36	37.87±1.55	1.90±0.30	9.97±1.68	3.51±0.53

L7w	6.53±1.31	12.83±1.66	46.12±1.78	2.12±0.57	9.17±1.56	3.97±0.45
L8w	6.16±1.42	12.89±1.44	40.13±2.94	1.80±0.63	9.85±2.02	3.04±0.81
L10w	6.39±1.40	12.61±1.14	33.32±2.77	1.41±0.48	9.87±1.70	3.01±0.76

*L2w: 肝硬化 2 周组，即大鼠肝硬化模型给药 2 周，其它以次类推

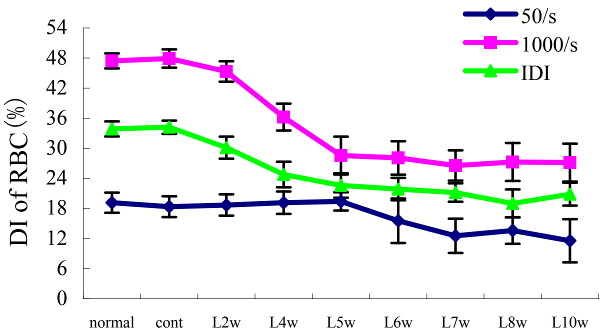


图 3-19 各组大鼠红细胞变形指数值

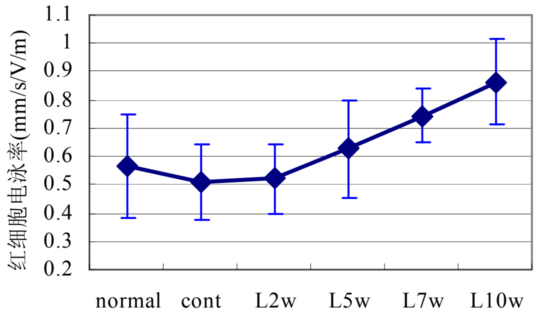


图 3-20 各组大鼠红细胞电泳率的变化

3.2.2.2　　血液流变学变化规律分析

从表 3-1 和图 3-19、3-20 可以看出：

（1）　肝硬化 2 周和 4 周组的红细胞计数与对照组没有明显差异，5 周、7 周、8 周和 10 周肝硬化组红细胞数出现了下降的趋势，但与其它的几组间没有显著的统计学差异(与正常对照组的组间 t 检验 P>0.05)；

（2）　肝硬化各组大鼠的血红蛋白含量均明显低于对照组(P<0.05)，早期(2 周)便出现了降低，到第 5 周达最低点，而肝硬化各组间的血红蛋白含量差异不显著(P>0.05)；

（3）　与正常组及对照组相比，肝硬化情况下大鼠红细胞压积在给药的第 4 周出现显著的异常降低（与正常对照组的组间 t 检验 P<0.05），至 6～7 周趋于平稳，随后又迅速降低，至 10 周肝硬化模型组降为最低值（与 7 周肝硬化模型组的组间 t 检验 P<0.05）;，

（4）　由图 3-19 可见，在高切变率下，肝硬化大鼠的红细胞变形指数在 2w 后开始出现降低，至 5w 后趋于平稳，与对照组间存在显著性差异(P <0.05)；在低切变率下，肝硬化大鼠的红细胞变形指数则在 5w 后开始出现降低，至 7w 后趋于平稳，7w 以上的肝硬化组与对照组间存在显著性差异(P<0.05)，而 5w 以前的肝硬化组与对照组间的差异不显著(P>0.05)；本实验中肝硬化各组大鼠的红细胞总变形指数（IDI）明显低于对照组(P<0.05)，特别在 5w 以后的各组更为显著。

（5）　由表 3-1 可见，2w 和 4w 组的血浆纤维蛋白原含量与对照组没有明显的差

异(P>0.05)；但在 5w-10w 组血浆纤维蛋白原含量明显降低，并且有持续下降的趋势，与对照组间存在显著的统计学差异(P<0.05)；

（6） 与对照组大鼠相比，肝硬化各组的全血粘度值在高、低切变率下均有下降的趋势，但各组间差异不显著（P>0.05）；

（7） 由图 3-20 可见，对照组和 2w 肝硬化组的红细胞电泳率没有明显的差异，但 5w、7w 和 10w 肝硬化组的红细胞电泳率明显递增，与对照组和 2w 组间存在明显差异(P<0.05)。提示：本实验中的肝硬化大鼠模型，从第 5 周起，直接影响红细胞电泳率的红细胞表面电荷持续增加

§ 3.3 结果与讨论

§ 3.3.1 大鼠肝硬化模型的制备

四氯化碳是一种亲肝性的化学毒物，在建立化学性肝硬化模型时经常应用。四氯化碳所致的慢性中毒可引起肝细胞的变性和坏死、胶原纤维的增生形成肝纤维化，最后形成大/小结节型肝硬化。目前常用的方法是利用四氯化碳与植物油或橄榄油混合成 20%~60%的浓度，每 3~7 天皮下注射一次，一般情况下，一周后即可见肝的胶原纤维增生，5~7 周可出现假小叶，7~12 周即可形成典型的肝硬化。

本实验采用了 60%的四氯化碳植物油皮下注射大鼠，并饮用 10%的酒精形成大鼠的化学性和酒精性肝硬化模型。在注射 1 周后，大鼠便出现了体重的不增或降低，精神萎靡，进食较差；2 周肝硬化大鼠的肝脏开始有增大的趋势，鼠重也开始下降，肝组织结构基本正常，仅在汇管区周围的肝细胞出现少量的脂肪变；4 周肝硬化大鼠体重有较为显著的下降，肝脏的体积和重量显著增加，肝小叶结构仍基本正常，肝小叶内肝细胞出现明显的脂肪变，并可见坏死的肝细胞以及肝细胞的分裂像，汇管区和肝索内胶原纤维增生（2 级）；7 周肝硬化大鼠的体重下降至接近最低，约为实验开始时的 1/2~3/5，肝脏增大至正常时的 2 倍，而且此前约有 10%~15%的大鼠并发胃底的出血而死亡；Ⅰ、Ⅲ型胶原纤维明显增生，在一些区域形成假小叶（4-5 级），肝细胞的坏死和分裂像常见。10 周肝硬化大鼠的体重相对稳定，肝脏较 7 周时减小；光镜下，肝纤维化（5 级）明显，已形成了典型的假小叶，即形成了典型的肝硬化大鼠模型。因此，对本实验模型而言，肝硬化形成初期是指大鼠在连续注射 10 周的这段时间。

该模型的优点是形成全肝性的肝硬化，而且对血浆和红细胞也均有不同程度的影响，因此是进行肝脏病理学以及血液流变学研究较为理想的模型。

§ 3.3.2 大鼠肝硬化形成早期的临床血液流变学改变

由于肝硬变早期的肝功能异常所造成的肝脏合成某些大分子物质的改变，可能会引起血液流变学各参数的变化，因此，在肝硬变形成早期系统研究临床血

液流变学各参数的变化规律，可能有助于指导临床肝硬变的早期诊断治疗。

大多数研究认为[36]，肝硬化时全血粘度、血浆粘度均高于正常，而红细胞的变形能力则低于正常，血细胞压积无明显变化。本研究通过对肝硬化大鼠多项临床血液流变学参数的系统检测后发现，在肝硬化早期的红细胞数量和全血粘度的降低不明显，而红细胞变形指数、血红蛋白和血浆纤维蛋白原含量在给药的第4~5w 出现了明显的下降。成年人的全血粘度相对稳定，但易受多种因素影响，其中最主要的有血细胞压积、血浆粘度、红细胞变形性等。血浆粘度的高低与所含的大分子物质如纤维蛋白原、脂蛋白等的浓度呈正相关，而血浆粘度的降低则使全血粘度下降。红细胞变形指数则是造成全血粘度上升的一个重要因素，这主要是由于肝硬化引起红细胞膜脂质的代谢紊乱[37]，形成了“棘形红细胞”[38]，降低了红细胞的变形能力所致。红细胞血红蛋白含量与红细胞的内粘度成正比。由此可见，在大鼠肝硬化的形成早期，红细胞变形指数、血浆纤维蛋白原和红细胞血红蛋白含量下降等综合结果，是本实验出现全血粘度降低不明显的原因。

另外，红细胞电泳实验表明，5 周以上的肝硬化大鼠的红细胞电泳率显著增加，这说明了其红细胞表面电荷的增加，而细胞表面的蛋白质、脂类和多糖都带有可电离的基团，如羟基、磷酸基等。因此，细胞的电泳行为异常，实际上是反映了构成细胞表面的各个组分中的某一个或几个发生改变后的整体状况体现。同时，红细胞的表面电荷又是影响红细胞聚集的主要因素，二者呈反相关。而实验中所出现的红细胞电泳率的递增，与文献报道的肝硬化时红细胞聚集性的下降相吻合[36]。

总之，大鼠肝硬变形成早期，在形态学上出现典型假小叶之前的 2w 左右，其血液流变学已经出现明显的异常。因此，通过对血液流变学各参数的联合检测，可能有助于肝硬变的及早发现和治疗。

§ 3.3.3 大鼠肝硬化形成早期的肝脏病理学改变及其与血液流变学改变的关系

在给药的第 4 周或第 5 周起开始出现红细胞计数、血红蛋白含量、红细胞压积、红细胞变形指数、血浆纤维蛋白原含量以及全血粘度等血液流变学参数的显著异常，至 6~7 周趋于平稳。与肝脏病理学上的变化相对比，可以说明：大鼠肝硬化所致的血液流变学指标改变，在形态学上开始出现典型的假小叶（第 7 周左右）之前的 2~3 周，便已经出现了显著异常。因此，通过对血液流变学各参数的联合检测，可能对及早发现肝硬化提供帮助。另外，通过监测肝脏病理学与血液流变学各指标发现，它们的变化对应的很好，血液流变学指标的异常程度与肝功能的损害程度有关，因此，通过对血液流变学各参数的联合检测，也可能对判断肝功能损害的程度提供帮助，从而提高肝硬化的临床疗效。

第四章 总结、创新点及进一步的工作

§4.1 总结

肝门静脉高压症（Portal hypertension，PHT）是世界范围内的一种常见病、多发病，严重影响病人的生存质量。血液动力学及流变学研究对于揭示 PHT 的发病机理，探讨其并发症出血的危险性，选择恰当的手术方式和手术时机以至检验药物的疗效等方面都有重要意义。

PHT 的主要发病原因是肝硬化。本文的动物模型是让大鼠通过慢性乙醇中毒和反复接触某些化学物质如四氯化碳引起中毒性肝炎，最后演变为肝硬化。我们首先制备出不同肝硬化程度的大鼠四氯化碳肝硬化模型，然后测量了正常及不同肝硬化程度情况下门静脉系统主要属支血管的直径、长度、血流量及压力等血液动力学参数，并且测量了全血粘度、红细胞压积、红细胞变形性、血浆纤维蛋白原、血红蛋白、红细胞电泳率等常见的血液流变学参数。此外我们还将正常及不同程度肝硬化的鼠肝制成组织学切片，利用光学显微镜进行了肝脏的组织形态学观察。

利用所测得的全面的鼠肝门静脉系统血管的血液动力学数据，本文建立了以流阻为基本元件且能同时模拟正常状态及不同肝硬化程度的大鼠肝门静脉系统的整体生物力学模型，该模型可以求出其它无法直接测量的参数，并对门静脉高压症的发生做出合理解释。

根据血液流变学实验和组织形态学观察，我们首次发现：大鼠肝硬化所导致的血液流变学指标异常，出现在形态学上呈现出典型的假小叶这一肝硬化病态特征之前的 2~3 周，这个现象还未见国内外类似报道。

§4.2 本部分主要创新点

在这一部分中，作者的主要**创新性贡献**有：

1. 肝硬化时，血液流变学指标异常出现在形态学病态发生前 2~3 周，这一新发现对肝硬化临床诊断和治疗有指导意义；
2. 本文测量了正常和肝硬化情况下较以往工作更为全面的血液动力学参

数和血液流变学参数，并在此基础上首次提出肝门静脉系统整体力学模型，能同时模拟正常状态和肝硬化状态，此理论模型为研究肝门静脉高压症提供了一种新的途径。

§4.3 进一步的工作

由于实验条件以及作者的时间和学识的限制，本文的工作还不够完善，尚有许多研究工作可做：

1．在动物实验中通过病理学与血液流变学的监测可以为利用诸如乙酮可可碱等药物治疗肝硬化提供依据；

2．为了从根本上解释肝硬化的诸多变化，可以进行分子生物学方面的实验，观察与肝有关的蛋白或因子（如内皮素、激活素）的具体变化；

3．培养 10 周以上的大鼠肝硬化模型，观察肝硬化晚期甚至肝癌阶段的血液动力学、血液流变学与病理学变化；

4．将整体生物力学模型推广到人体门静脉系统，为正确地选择手术时机，手术方式和判断手术预后提供更为有效的理论依据。

参考文献

[1] 于频. 系统解剖学. 北京：人民卫生出版社，1999, 215-226.

[2] 漆德芳, 孟申, 刘健主编. 肝硬化. 北京：科学技术出版社，2000, 210-227

[3] Wang JY, Hsieh JS. Influence of portal hypertension on secretion of gastric mucus in rats. Eur J Surg, 2000, 166(2):170-176

[4] Spina GP, Arcidiacono R, Bosch J, et al. Gastric endoscopic features in portal hypertension: final report of a consensus conference. J Hepatol, 1994, 21(3):461-465

[5] Menon KV, Kamath PS. Managing the complications of cirrhosis. Mayo Clin Proc, 2000, 75(5):501-505

[6] 王宇. 门静脉高压症的外科治疗. 中华普通外科杂志, 2000, 9(1):1-4

[7] Fuminori Moriyasu. Measurement of portal vascular resistance in patients with portal hypertension. Gasiroenterology. 1986, 90: 710-714

[8] Groszmann R J. Hyperdynamic state in chronic liver disease. J Hepatol. 1993, 17(suppl 2): 538-542

[9] Benoit JN, Womack WA, Hernandez L, et al. "Forward" and "backward" flow mechanisms of portal hypertension. Gastroenterology, 1985, 89(6):1092-1096

[10] Veal N, Oberti F. Spleno-renal shunt blood flow is an accurate index of collateral circulation in different models of portal hypertension and after pharmacological changes in rats. J Hepatol, 2000, 32(3):434-438

[11] Otal P, Rousseau H. High occlusion rate in experimental transjugular intrahepatic portosystemic shunt created with a Dacron-covered nitinol stent. J Vasc Interv Radiol, 1999, 10(2):183-188

[12] 申麒，蒋忠仆，邢坚强等. 门静脉高压症介入断流术前后血液动力学的改变及临床意义. 临床放射学杂志，2002, 21(12):972-975

[13] 黄莛庭. 门静脉高压症外科治疗的现状和发展趋势. 中国实用外科杂志, 2000;20(1):16

[14] 郑英健,王文龙. 断流加分流联合手术治疗门静脉高压症的血流动力学变化. 中国普通外科杂志, 2000, 9(1):8-13

[15] Bosch J, Garc J, Pag JC. Complications of cirrhosis. I. Portal hypertension. J Hepatol, 2000, 32(1):141-144

[16] Escorsell A, Bordas JM, Llach J, et al. Predictive value of the variceal pressure response to continued pharmacological therapy in patients with cirrhosis and portal hypertension. Hepatology, 2000; 31(5):1061-1064

[17] 朱雅琪，苏晓波，陶铸，等. 门静脉高压的血流动力学研究. 中华消化杂志, 1991, 11(4):

202-207

[18] 朱樑，李广君，许世雄等. 肝循环门静脉系统的压力—流量关系. 中国生物医学工程学报， 1992, 11(3):157-162

[19] 朱樑，李广君，许世雄等. 肝循环门静脉系统的流导、阻力研究. 中国生物医学工程学报, 1994, 13(2):111-116

[20] 郑恩涛，冷希圣，刘继超等. 肝硬变时肝内门静脉系统血管顺应性的研究. 中华外科杂志, 1998, 36(6):350-355

[21] 郑恩涛. 门静脉系统自身调节及其本构关系的初步观察. 北京医科大学博士研究生学位论文 1999

[22] 叶志义,卢晓. 鼠肝门静脉残余应变研究. 医用生物力学, 1999, 14 (4):208-211

[23] 刘传绶，张健美，孙衍庆. 限制性门腔静脉侧侧分流术的血液动力学与最佳吻合口径的选择. 中华外科杂志, 1986, 24(1): 44-49

[24] Seifert WF, Bosma A, Brouwer A, et al. Vitamin A deficiency potentiates carbon tetrachloride-induced liver fibrosis in rats. Hepatology, 1994,19(2):193-201

[25] 许世雄，计琳，朱樑等. 门静脉高压的血液动力学模拟研究. 医用生物力学，1998,13(2):65-71

[26] 周岩冰，冷希圣，齐桂英等. 肝前型门静脉高压大鼠门体分流及循环动力学的实验研究. 中华外科杂志, 1997, 35(4): 244-247

[27] 陈德. 门静脉高压症研究现状. 腹部外科. 2003,16(2): 84-85

[28] 郝洪升，傅淑花，李学会. 肝硬化患者肠系膜上动脉血流动力学变化的观测. 中国现代普通外科进展. 2000, 3(1):30-31

[29] 黄生传，张秉亨，赵新民等. 彩色多普勒超声对肝炎后肝硬化脾肿大脾内血流的研究. 中国医学影像技术. 2002, 18(2): 164-165

[30] Vorobioff J, Bredfeldt JE, Grosmann RJ. Hyperdynamic circulation in portal hypertensive rat model: a primary factor for maintenance of chronic portal hypertension. Am J Physiol. 1983, 244: 52-55

[31] 凌伟，吴志勇，陈治平等. 肝硬化门脉高压鼠血浆内皮素变化. 中华肝胆外科杂志. 1999, 5(4): 245-147

[32] Brenner DA, et al, New aspects of hepatic fibrosis, J Hepatol, 2000:32(1 Suppl):32-38

[33] Schuppan D, et al, Fibrosis of liver, pancreas and intestine: common mechanisms and clear targets, Acta Gastroenterol Belg, 2000, 63(4):366-370

[34] 赵春亭，赵子文，临床血液流变学，北京人民卫生出版社，1997，7-58

[35] 严宗毅，魏茂元，于天文，血液流变学——基础・检测・应用，黑龙江科学技术出版社，1993, 209-216

[36] Tamer S, Cefle K, Palanduz S, et al. Rheological properties of blood in patients with chronic liver disease. Clin Hemorheol Microcirc, 2002, 26(1): 9-14

[37] Macchia T, Mancinelli R, Barbini DA, et al. Determination of membrane cholesterol in normal and pathological red blood cells. Clin Chem Acta, 1991, 199(1): 59-67

[38] Turchetti V, Bellini MA, Leoncini F, et al. Blood viscosity and red cell morphology in subjects suffering from cirrhosis before and after treatment with S-adenosyl-L-methionine (SAM) . Clin Hemorheol Microcirc, 2000, 22(3): 215-221

附　　图

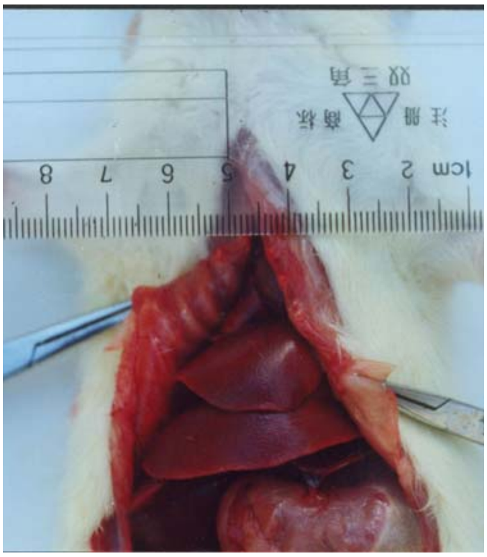


图 3-3 正常对照组大鼠的肝

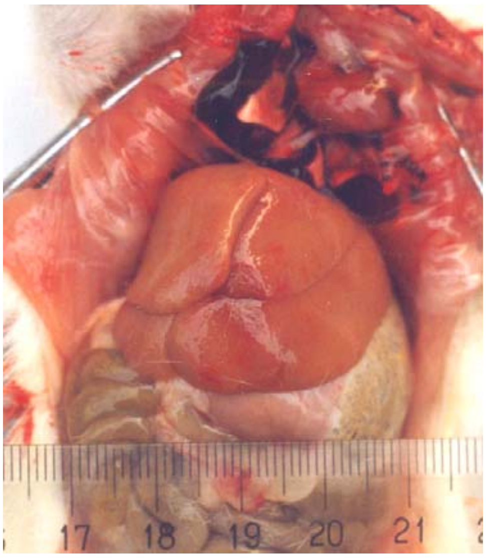


图 3-4 肝硬化 4 周大鼠的肝

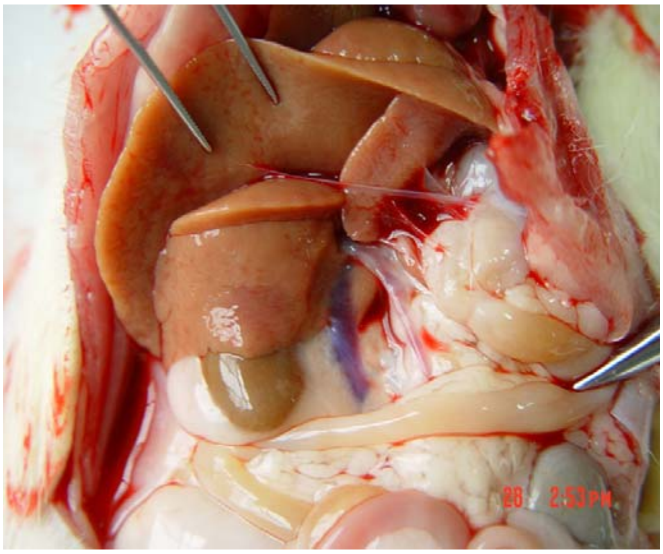


图 3-5　肝硬化 7 周大鼠的肝

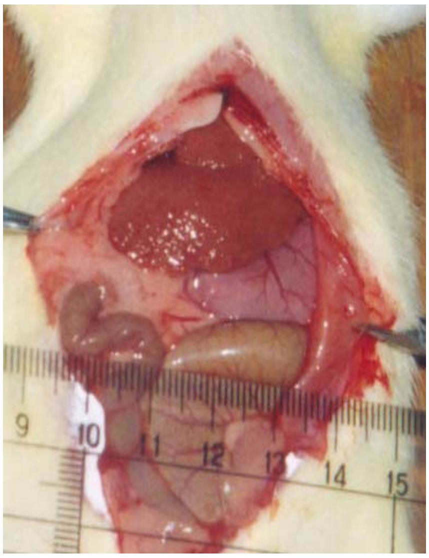


图 3-6 肝硬化 10 周大鼠的肝

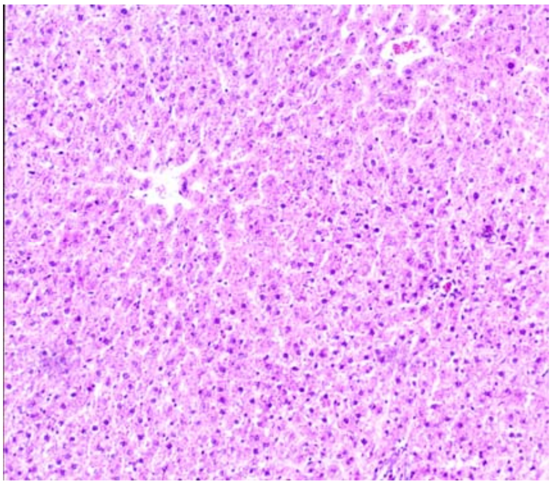


图 3-7　正常肝组织 H-E 染色

图 3-8 正常肝组织天狼猩红染色

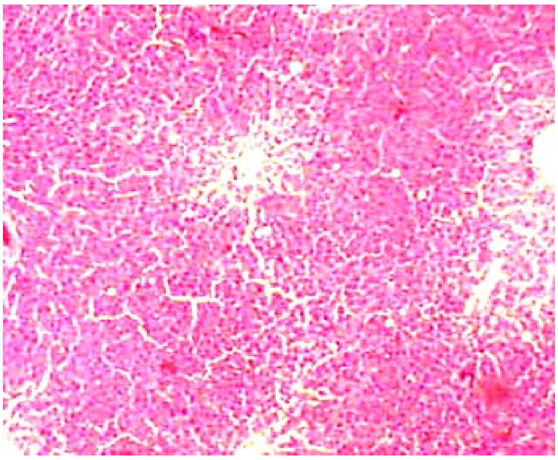


图 3-9　肝硬化 2 周组 H-E 染色

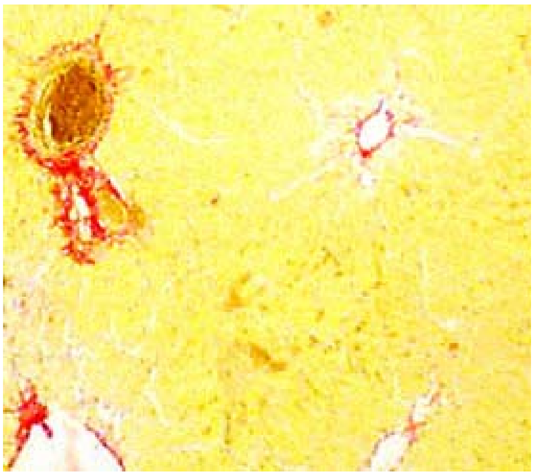


图 3-10.肝硬化 2 周组天狼猩红染色

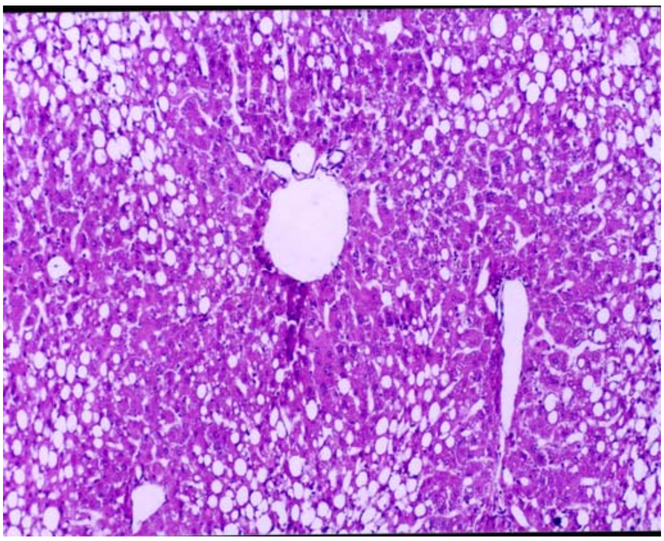


图 3-11 肝硬化 4 周组 H-E 染色

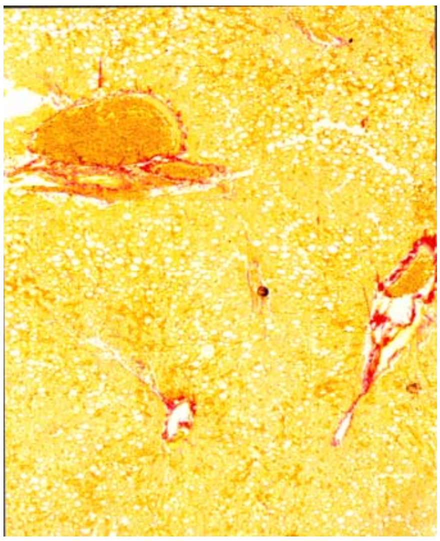


图 3-12　肝硬化 4 周组天狼猩红染色

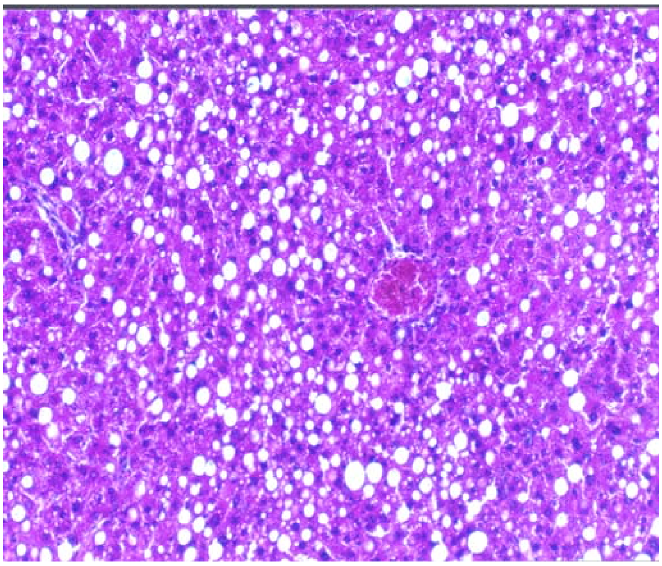


图 3-13 肝硬化 6 周组 H-E 染色

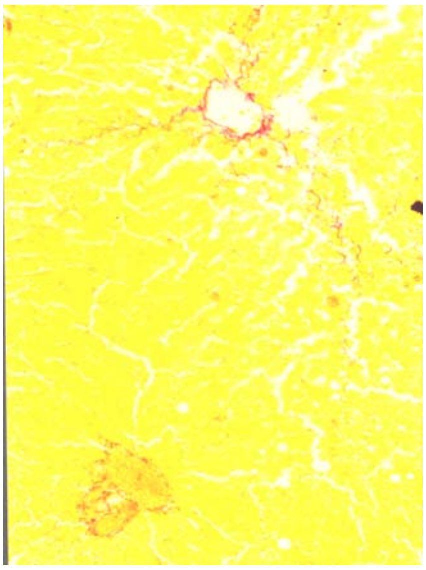


图 3-14 肝硬化 6 周组天狼猩红染色

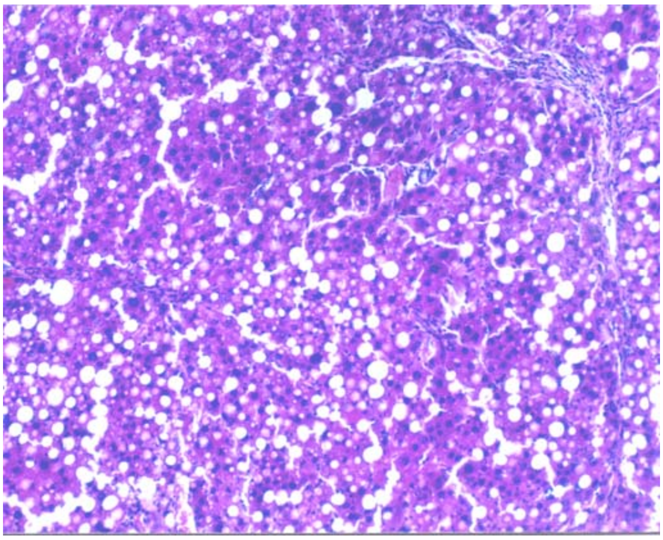


图 3-15 肝硬化 7 周组 H-E 染色

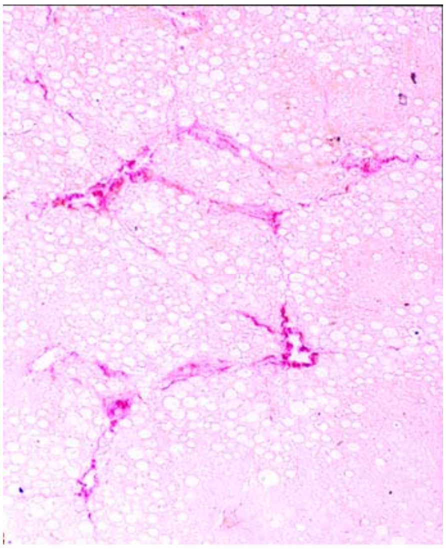


图 3-16 肝硬化 7 周组天狼猩红染色

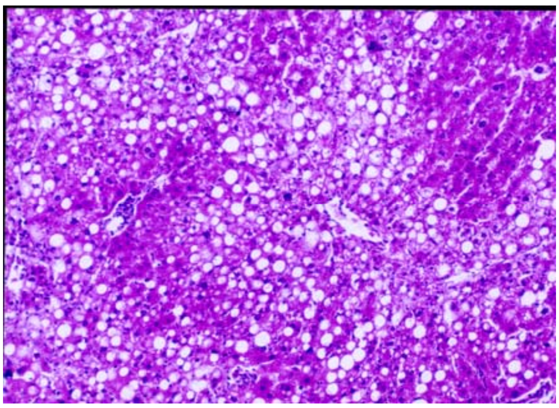


图 3-17 肝硬化 10 周组肝组织 H-E 染色

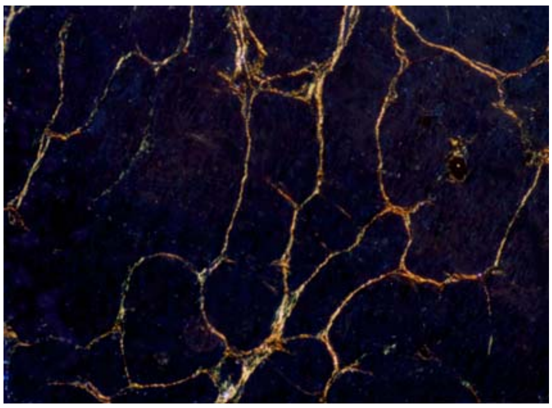


图 3-18 肝硬化 10 周组肝组织天狼猩红染色

附录 II 分数阶微积分在广义二阶流体中的应用

第一节 绪论

§ 1.1 引言

Navier-Stokes 方程是流体力学中最基本的运动方程，但其精确解只有在少数情况下才能获得，若再考虑流体的非牛顿特性——粘弹性，其精确解更是少之又少。

事实上，在高分子化工、食品、石油开采以及生物工程的诸多领域，常常涉及粘弹性流体，如各类泥浆、高分子悬浮液、关节液等，需要研究粘弹性流体的运动特性。但粘弹性流体不像牛顿流体，很难建立一个简单的本构关系模型来表现粘弹性流体的全部特性，因而出现了多种粘弹性流体的本构关系模型，如 Maxwell 模型、二阶流体模型和 Oldroyd-B 流体模型等。这些模型是基于唯象理论而导出的，它们各自对某一类材料基本能近似反映应力应变关系，但是都很难在全频域内刻画粘弹性流体的基本特性[1-3]。

近年来，作为分形几何和分数维的动力学基础，分数阶微积分的理论和应用研究，日益倍受关注。在松弛、振荡、扩散与波的研究，以及在粘弹性本构关系式的研究中均获得了许多重要成果。这种方法的出发点是用分数阶导数来替换本构方程中应力应变对时间的整数阶导数，从而实现对应力应变关系的更真实的刻画。

附录 II 中采用这种思想，将分数阶微积分运算引入二阶流体的本构方程，建立了带分数阶导数的广义二阶流体模型，研究了粘弹性流体的几种典型非定常流动。对于带有涡流运动的广义二阶流体，导出了对时间具有分数阶导数的运动方程，即运动的控制方程是分数阶的偏微分方程，并利用分数阶导数的 Laplace 变换和 Hankel 变换，得到了涡流速度场和温度场的解析解。而对于受热的广义二阶流体 Rayleigh-Stokes 问题，同样导出了对时间具有分数阶导数的运动方程，然后利用分数阶导数的 Laplace 变换和 Fourier 正弦变换，求出了流动的解析解。

§ 1.2 相关研究进展

最近，对粘弹性流体的研究引起了许多研究者的关注。Rajagopal 研究了二阶流体在四种不同流动条件下的非定常流动[4]，Erdogan 考虑了三阶流体的平面突然起动问题[5]。Rajagopal 与 Hayat 等人分别考察了 Oldroyd-B 流体的一些简单流动[6,7]，黄军旗等人和徐明瑜等人也分别研究了粘弹性流体的不同问题 [8,9]。

谭文长等人将分数阶微积分引入到二阶流体及 Maxwell 粘弹性流体的本构方

程中，从而建立了广义二阶粘弹性流体的分数阶导数模型，并研究了不同流动条件下的非定常流动[10-15]。

另外，Palade 等人分别将分数阶微积分引入到不同粘弹性体的研究中，取得了与实验一致的满意结果[16-19]。宋道云、江体乾等人将广义 Maxwell 粘弹性流体的分数阶导数模型应用到对化工各种高分子材料的研究中，也取得了与实验一致的满意结果[20]。

§ 1.3 基本方程与本构关系

不可压缩二阶流体的本构方程可表示为[21]：

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu\mathbf{A_1} + \alpha_1\mathbf{A_2} + \alpha_2\mathbf{A_1}^2 \tag{1-1}$$

式中 $\mathbf{T}$ 为应力张量, $-p$ 是压力，$\mathbf{I}$ 是单位向量，$\mathbf{A_1}$ 和 $\mathbf{A}_2$ 可定义为 [22] ：

$$\mathbf{A_1} = grad\mathbf{V} + (grad\mathbf{V})^T, \tag{1-2}$$

$$\mathbf{A_2} = \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} + \mathbf{A}_1(grad\mathbf{V}) + (grad\mathbf{V})^T\mathbf{A}_1 \tag{1-3}$$

这里 $\mathbf{V}$ 是速度向量。

α_1 和 α_2 是粘弹性系数，μ 是粘性系数，满足[20]：

$$\mu \geq 0,\ \ \alpha_1 \geq 0 \ \ 和 \ \ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \tag{1-4}$$

对于广义二阶流体，方程.(1-1) 仍然适用，$\mathbf{A}_2$ 则定义为[8,9,11,15,23]：

$$\mathbf{A}_2 = D_t^{\ \beta}\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1(grad\mathbf{V}) + (grad\mathbf{V})^T\mathbf{A}_1 \tag{1-5}$$

这里 $D_t^{\ \beta}$ 为 Riemann-Liouvill 分数阶导数算子，其定义为[24]：

$$D_t^{\ \beta}[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t}(t-\tau)^{-\beta}f(\tau)d\tau \qquad (0<\beta<1) \tag{1-6}$$

其中 $\Gamma(\bullet)$ 表示 Gamma 函数，β 是分数阶扩散指数。

在忽略体力的条件下,运动方程为:

$$\rho\frac{\mathrm{D}\mathbf{V}}{\mathrm{D}t} = \nabla\cdot\mathrm{T} \tag{1-7}$$

这里 ρ 是流体的密度， $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ 是物质导数， ∇ 是 Laplace 算子。

连续性方程为:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V} = 0 \tag{1-8}$$

根据上面一系列方程，广义二阶流体的本构关系可用下面带有分数阶导数的方程表示[14]：

$$\tau(t) = \mu\varepsilon(t) + \alpha_1 D_t^{\ \beta}[\varepsilon(t)] \tag{1-9}$$

式中τ为切应力，ε为切应变，μ为粘性系数，α_1为分数阶粘弹性系数， 在方程(1-9)中，当β=1 时简化为经典的二阶流体：

$$\tau(t) = \mu\varepsilon(t) + E\frac{\partial\varepsilon(t)}{\partial t} \tag{1-10}$$

其中E为粘弹性系数。当α_1=0 或β=0 时，即化为完全的粘性牛顿流体。

第二节 广义二阶流体涡流速度的衰减和温度扩散

本节利用(1-9)式的本构关系，研究了广义二阶流体涡流运动的速度场和温度场的变化规律。通过对流动方程的空间变量做 Hankel 变换，对时间变量做分数阶导数的 Laplace 变换，利用离散逆 Laplace 变换技巧和广义 Mittag-Leffler 函数，对于β为任意分数时得到了流动的精确解，分析了分数阶扩散指数β对速度场和温度场的影响。一些前人所得到的结果均可作为本文结果的特例而出现，如 Fetecau 等人有关二阶流体涡流运动的速度衰减和温度扩散解[25]，经典的粘性牛顿流体的涡流解等。这对进一步研究粘弹性流体的力学特性提供了新的解析工具。

§ 2.1 数学模型

2.1.1 速度场

考虑广义二阶流体的涡流运动，在初始时刻涡量为Γ_0，假定流体不可压缩，流动轴对称。在柱坐标系(r,θ,z)下，速度分量可以表示为：

$$v_r = 0, v_\theta = \omega(r,t), v_z = 0$$

广义二阶流体的本构方程为：

$$\tau_{r\theta} = \mu r\frac{\partial}{\partial r}[\frac{\omega(r,t)}{r}] + \alpha_1 D_t^{\ \beta}[r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\omega(r,t)}{r})] \tag{2-1}$$

动量守恒方程：

$$\rho\frac{\partial\omega(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\theta}) \tag{2-2}$$

其中$\tau(r,\theta)$为切应力分量，ρ，μ分别为流体的密度和粘度。将(2-1)式代入(2-2)式中，并整理得：

$$\frac{\partial\omega(r,t)}{\partial t} = (\nu + \alpha D_t^{\ \beta})(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r\partial r} - \frac{1}{r})\omega(r,t) \tag{2-3}$$

式中 $\nu = \mu/\rho, \alpha = \alpha_1/\rho$。初始条件：

$$\omega(r,0) = \Gamma_0/(2\pi r) \tag{2-4}$$

在无穷远处，假设自然边条件成立：

$$\omega(r,t),\frac{\partial\omega(r,t)}{\partial r}\to 0 \qquad \text{当}\ \ r\to\infty,t>0 \tag{2-5}$$

2.1.2 温度场

进一步地，我们考虑广义二阶流体在作涡流运动过程中存在温度场。温度场的初条件和无穷远条件可以假设为[14]：

$$\theta(r,0)=\theta_0/(2\pi r) \tag{2-6}$$

$$\theta(r,t),\frac{\partial\theta(r,t)}{\partial r}\to 0 \qquad \text{当}\ \ r\to\infty,t>0 \tag{2-7}$$

根据 Fourier 定律，温度场的控制方程可写为如下形式[14,25]：

$$\frac{\partial\theta(r,t)}{\partial t}=\beta_1(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial}{r\partial r})\theta(r,t)+\frac{\nu}{c}[\frac{\partial\omega(r,t)}{\partial r}-\frac{\omega(r,t)}{r}]^2+\frac{h(r,t)}{c} \tag{2-8}$$

式中 c 为比热，$\beta_1=k/(\rho c)$，k 为热传导率，ρ 为流体密度，均为常数。*h(r,t)*为辐射热，本文中不考虑辐射传热，将 *h(r,t)*取为 0。从形式上看，(2-8)式与牛顿粘性流体及经典二阶流体的能量方程是相同的，然而，由于式中涉及到的速度 $\omega(r,t)$ 是广义二阶流体的速度，不同于牛顿粘性流体和经典二阶流体，故由(2-8)式得出的温度场 $\theta(r,t)$ 与其也会不同。

§ 2.2 求解速度场

引入如下无量纲参数：$\omega^*=\frac{\omega\nu}{{\Gamma_0}^2},r^*=\frac{r\Gamma_0}{\nu},t^*=\frac{t{\Gamma_0}^2}{\nu}$，利用(1-6)式和积分中值定理可以证明[9,10,26]，算子 ${D_t}^\beta$ 具有分数阶时间量纲 $[\nu/{\Gamma_0}^2]^{-\beta}$。由于以上分数阶算子的引入，使得经典 N-S 方程的量纲齐次化由整数阶扩展为分数阶，因此(2-1)式中的 α_1 和(1-10)式中的粘弹性系数 E 相差一个常数因子 c^{-1} 而有 $\alpha=E/c$，c 是量纲为 $[\nu/{\Gamma_0}^2]^{\beta-1}$ 的分数阶量纲“配平”系数[9,10,26]。由以上分析可得如下无量纲分数阶方程和定解条件（为简单起见，以下省略右上角无量纲记号“*”）：

$$\frac{\partial\omega(r,t)}{\partial t}=(1+\eta D_t^\beta)(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial}{r\partial r}-\frac{1}{r})\omega(r,t) \tag{2-9}$$

$$\omega(r,t),\frac{\partial\omega(r,t)}{\partial r}\to 0 \qquad \text{当}\ \ r\to\infty,t>0 \tag{2-10}$$

$$\omega(r,0)=1/2\pi r \tag{2-11}$$

其中$\eta=\alpha\frac{\Gamma_0^{\ 2}}{\nu^2}$，考虑到方程(2-9)-(2-11)式的分数阶方程整数阶初条件的特点，算子 D_t^β 应当取为 Miller-Ross 型序贯分数阶导数(Sequential Fractional Derivatives)[24]。为了对方程精确求解，引入如下 Hankel 变换[27]。

$$\text{正变换为：}\ \omega_h(\xi,t)=\int_0^\infty rJ_1(\xi r)\omega(r,t)dr=H\{\omega(r,t)\} \tag{2-12}$$

$$\text{逆变换为：}\ \omega(r,t)=\int_0^\infty \xi J_1(\xi r)\omega_h(\xi,t)d\xi \tag{2-13}$$

这里$J_1(\xi r)$为第一类一阶 Bessel 函数，满足：

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dJ_1}{dr})+\xi^2(1-\frac{1}{r^2})J_1=0 \tag{2-14}$$

$$\begin{aligned}&H\{\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}-\frac{\omega}{r^2}\}=\int_0^\infty(r\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\frac{\partial\omega}{\partial r}-\frac{\omega}{r})J_1(\xi r)dr\\&=\int_0^\infty J_1(\xi r)d(r\frac{\partial\omega}{\partial r})-\int_0^\infty\frac{\omega}{r}J_1(\xi r)dr=\int_0^\infty[\omega\frac{d}{dr}(r\frac{dJ_1(\xi r)}{dr})-\frac{\omega}{r}J_1(\xi r)]dr\\&=-\int_0^\infty rJ_1(\xi r)\times\xi^2\omega dr=-H\{\xi^2\omega\}=-\xi^2\omega_h(\xi,t)\end{aligned} \tag{2-15}$$

(2-15)式的推导过程中用到(2-10)和(2-14)式。

对(2-9)，（2-11）式做 Hankel 正变换，并利用 (2-15)式，整理得：

$$\frac{d\omega_h(\xi,t)}{dt}+(1+\eta D_t{}^\beta)[\xi^2\omega_h(\xi,t)]=0 \tag{2-16}$$

$$\omega_h(\xi,0)=1/2\pi\xi \tag{2-17}$$

设$\overline{\omega_h}(\xi,s)=L\{\omega_h(\xi,t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\omega_h(\xi,t)dt$为$\omega_h(\xi,t)$的象函数，$s$ 为变换参量，对(2-16)式应用分数阶导数的 Laplace 变换[24]，并结合(2-17)式，可求得：

$$\overline{\omega_h}(\xi,s)=\frac{1}{2\pi\xi}(1+\eta\xi^2s^{\beta-1})\cdot\frac{1}{s+\eta\xi^2s^\beta+\xi^2} \tag{2-18}$$

为了求得$\overline{\omega_h}(\xi,s)$的逆Laplace变换，这里采用离散逆Laplace变换技巧[24]，将(2-18)式右端展为 Taylor 级数，则有：

$$\begin{aligned}\overline{\omega_h}(\xi,s)&=\frac{1}{2\pi\xi}(1+\eta\xi^2s^{\beta-1})\cdot\frac{1}{\xi^2}\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\xi^{2(k+1)}\cdot\frac{s^{-\beta k-\beta}}{(s^{1-\beta}+\eta\xi^2)^{k+1}}\\&=\frac{1}{2\pi\xi^3}\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\xi^{2(k+1)}\cdot\frac{s^{-\beta k-\beta}}{(s^{1-\beta}+\eta\xi^2)^{k+1}}+\frac{\eta}{2\pi\xi}\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\xi^{2(k+1)}\cdot\frac{s^{-\beta k-1}}{(s^{1-\beta}+\eta\xi^2)^{k+1}}\end{aligned} \tag{2-19}$$

对上式逐项求逆 Laplace 变换，可得：

$$\omega_h(\xi,t)=\frac{1}{2\pi\xi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\xi^{2k}t^k[E_{1-\beta,1+\beta k}{}^{(k)}(-\eta\xi^2t^{1-\beta})+\eta t^{1-\beta}E_{1-\beta,2+\beta(k-1)}{}^{(k)}(-\eta\xi^2t^{1-\beta})] \quad (2\text{-}20)$$

其中 $E_{\alpha,\beta}(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$ 是广义 Mittag-Leffler 函数[24]，在获得（2-20）式的过程中利用了广义 MIittag-Leffler 函数的 Laplace 逆变换的一个重要性质：

$$L^{-1}\{\frac{n!\,s^{\lambda-\mu}}{(s^\lambda\mp c)^{n+1}}\}=t^{\lambda n+\mu-1}E_{\lambda,\mu}{}^{(n)}(\pm ct^\lambda) \qquad (\mathrm{Re}(s)>|c|^{1/\lambda}) \quad (2\text{-}21)$$

对(2-20)式做 Hankel 逆变换，利用逆变换表达式(2-13)可得速度场的精确解：

$$\omega(r,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty J_1(r\xi)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\xi^{2k}t^k[E_{1-\beta,1+\beta k}{}^{(k)}(-\eta\xi^2t^{1-\beta})+\eta\xi^2t^{1-\beta}E_{1-\beta,2+\beta(k-1)}{}^{(k)}(-\eta\xi^2t^{1-\beta})]d\xi \quad (2\text{-}22)$$

特别的，当 η=0 时，(2-18)式化为：

$$\overline{\omega_h}(\xi,s)=\frac{1}{2\pi\xi(s+\xi^2)} \quad (2\text{-}23)$$

对(2-23)式的 s 和 ξ 分别做 Laplace 逆变换和 Hankel 逆变换后，很容易得到：

$$\omega(r,t)=\frac{1}{2\pi r}[1-\exp(-\frac{r^2}{4t})] \quad (2\text{-}24)$$

将(2-24)转化为有量纲的形式便可得到经典的牛顿粘性流体的 Reiner-Rivlin 流动解[25].

如令 β=1，(2-18)式化为：

$$\overline{\omega_h}(\xi,s)=\frac{1}{2\pi\xi}\cdot\frac{1+\eta\xi^2}{s+\eta\xi^2s^\beta+\xi^2} \quad (2\text{-}25)$$

对(2-25)式的 s 和 ξ 分别做 Laplace 逆变换和 Hankel 逆变换后，可以得到：

$$\omega(r,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty J_1(r\xi)\exp(-\frac{\xi^2}{1+\eta\xi^2}t)d\xi \quad (2\text{-}26)$$

将(2-26)转化为有量纲的形式，就可以得到 Fetecau 等人有关二阶流体涡流运动的速度解[25]。

§ 2.3 求解温度场

引入无量纲参数：$\theta^*=\dfrac{\theta\nu}{\theta_0\Gamma_0},\omega^*=\dfrac{\omega\nu}{\Gamma_0{}^2},r^*=\dfrac{r\Gamma_0}{\nu},t^*=\dfrac{t\Gamma_0{}^2}{\nu}$，则(2-6)~(2-8)式可化为（以下为简便记，省略右上角“*”)：

$$\frac{\partial\theta(r,t)}{\partial t}=\beta_2(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial}{r\partial r})\theta(r,t)+\eta_1[\frac{\partial\omega(r,t)}{\partial r}-\frac{\omega(r,t)}{r}]^2 \quad (2\text{-}27)$$

$$\theta(r,t),\frac{\partial\theta(r,t)}{\partial r}\to 0 \qquad 当\ r\to\infty,t>0 \tag{2-28}$$

$$\theta(r,0)=1/(2\pi r) \tag{2-29}$$

其中 $\beta_2=\dfrac{\beta_1}{\nu}$, $\eta_1=\dfrac{\Gamma_0{}^3}{c\nu\theta_0}$。

令 $$f(r,t)=\eta_1[\frac{\partial\omega(r,t)}{\partial r}-\frac{\omega(r,t)}{r}]^2 \tag{2-30}$$

(2-27)式可化为：

$$\frac{\partial\theta(r,t)}{\partial t}=\beta_2(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial}{r\partial r})\theta(r,t)+f(r,t) \tag{2-31}$$

为了解析求解，对(2-29)，(2-31)式的空间变量 r 作 Hankel 变换[27]，根据方程(2-31)的形式拟采用的 Hankel 变换为：

正变换为：$$\theta_h(\xi,t)=\int_0^\infty rJ_0(\xi r)\theta(r,t)dr \tag{2-32}$$

逆变换为：$$\theta(r,t)=\int_0^\infty \xi J_0(\xi r)\theta_h(\xi,t)d\xi \tag{2-33}$$

这里 $J_0(\xi r)$ 为第一类零阶 Bessel 函数.

对(2-31)式做如上 Hankel 正变换，利用无穷远条件(2-28)式，经整理得：

$$\frac{d\theta_h(\xi,t)}{dt}+\beta_2\xi^2\theta_h(\xi,t)=f_h(\xi,t) \tag{2-34}$$

其中 $f_h(\xi,t)$ 为 *f(r,t)*的 Hankel 变换，将(2-22)式代入到(2-30)中，得到：

$$\begin{aligned}f_h(\xi,t)=\frac{\eta_1}{4\pi^2}\int_0^\infty rJ_0(\xi r)\times\{\int_0^\infty xJ_2(xr)\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!}x^{2k}t^k[E_{1-\beta,1+\beta k}{}^{(k)}(-\eta x^2t^{1-\beta})\\+\eta x^2t^{1-\beta}E_{1-\beta,2+\beta(k-1)}{}^{(k)}(-\eta x^2t^{1-\beta})]dx\}^2dr\end{aligned} \tag{2-35}$$

上式的推导过程中用到 Bessel 函数的递推公式[27]：

$$xrJ_1{}'(xr)=J_1-xrJ_2(xr)$$

初条件(2-29)式作 Hankel 正变换可得：

$$\theta_h(\xi,0)=1/2\pi\xi \tag{2-36}$$

由(2-34)、(2-36)式容易得到：

$$\theta_h(\xi,t)=e^{-\beta_2\xi^2t}[\frac{1}{2\pi\xi}+\int_0^t f_h(\xi,\tau)e^{\beta_2\xi^2\tau}d\tau] \tag{2-37}$$

利用(2-34)对上式作 Hankel 逆变换，可得：

$$\theta(r,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\beta_2\xi^2 t}J_0(\xi r)d\xi+\int_0^\infty \xi J_0(\xi r)\cdot[\int_0^t f_h(\xi,\tau)e^{-\beta_2\xi^2(t-\tau)}d\tau]d\xi \qquad (2\text{-}38)$$

将(2-35)式代入上式中，便可得温度场分布：

$$\theta(r,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\beta_2\xi^2 t}J_0(\xi r)d\xi+\frac{\eta_1}{4\pi^2}\int_0^\infty \xi J_0(r\xi)\int_0^t e^{-\beta_2\xi^2(t-\tau)}\int_0^\infty rJ_0(\xi r)g^2(r,\tau)drd\tau d\xi$$

(2-39)

其中：

$$g(r,\tau)=\int_0^\infty xJ_2(rx)\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!}x^{2k}\tau^k[E_{1-\beta,1+\beta k}{}^{(k)}(-\eta x^2 t^{1-\beta})+\eta x^2\tau^{1-\beta}E_{1-\beta,2+\beta(k-1)}{}^{(k)}(-\eta x^2 t^{1-\beta})]dx$$

(2-40)

§ 2.4 结果分析与讨论

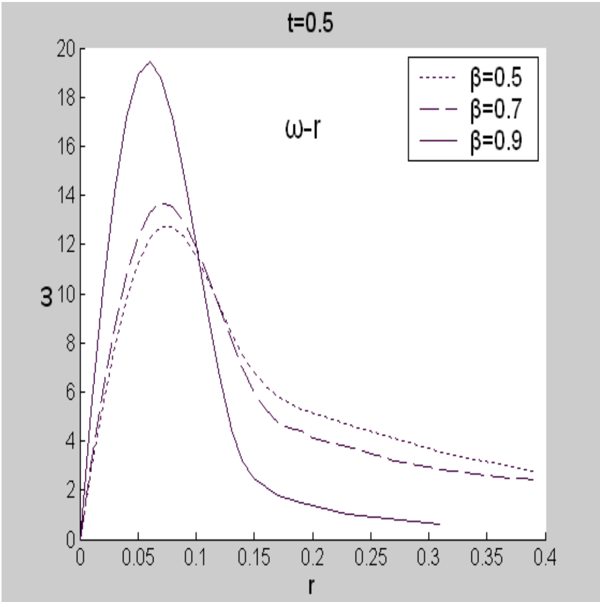


图 2-1 不同 β 值的ω随距离 r 的分布曲线

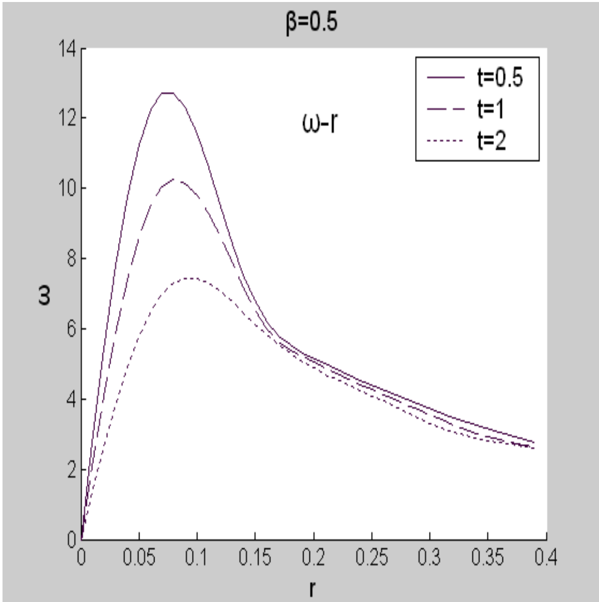


图 2-2 不同时间的ω随距离 r 的分布曲线

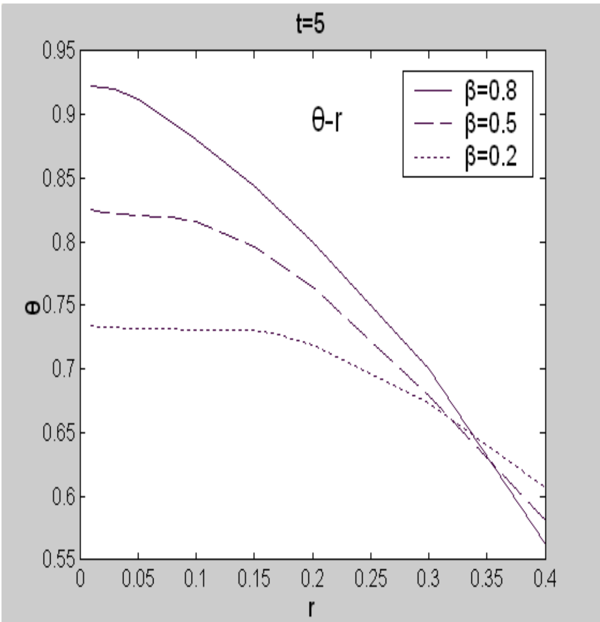


图 2-3 不同 β 值的温度随距离 r 的分布曲线

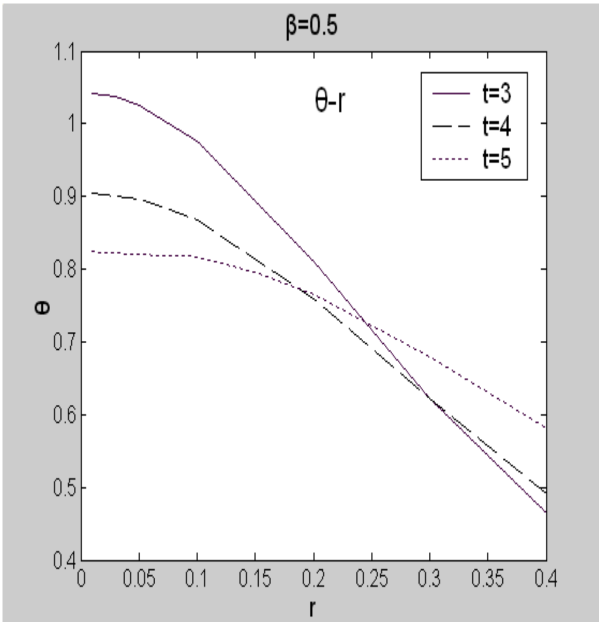


图 2-4 不同时间的温度随距离 r 的分布曲线

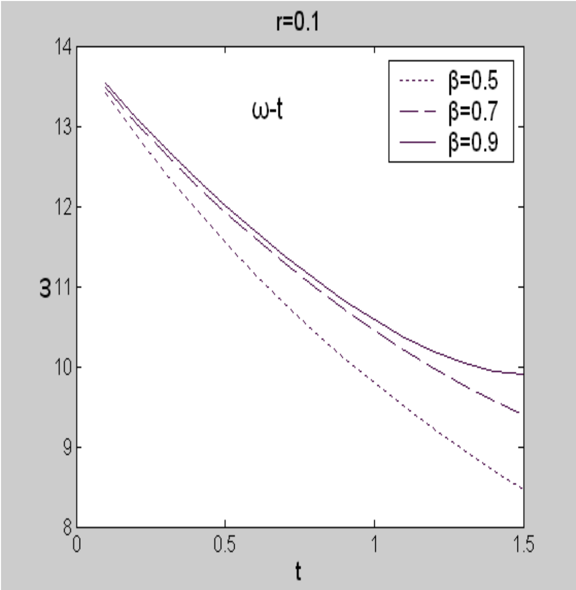


图 2-5 不同 β 值的 ω 随时间 t 的分布曲线

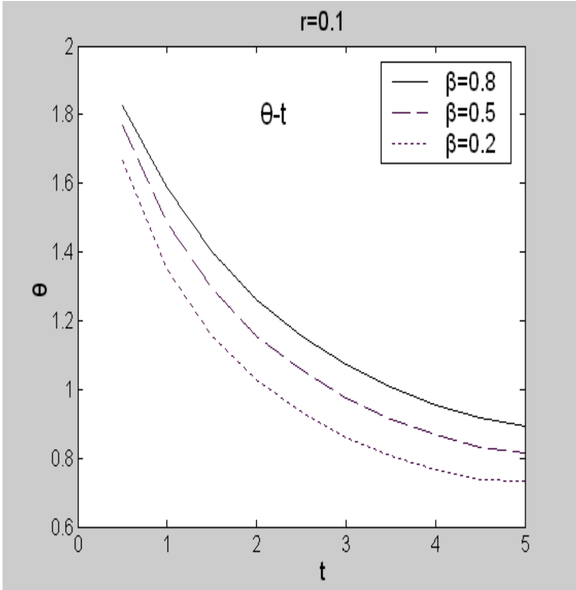


图 2-6 不同 β 值的温度随时间 t 的分布曲线

公式（2-22）和（2-39）分别给出了广义二阶流体涡流运动的速度场和温度场的解析解，利用数学软件 Matlab 数值模拟了在不同时刻下分数阶指数扩散 β 对速度场和温度场空间分布的影响。

图 2-1 和图 2-2 给出了选定参数下涡流速度 $\omega(r,t)$ 随空间变量 r 的扩散规律。从分布曲线中可看出，起初，随着 r 的增加，由于初始时刻存在涡量 Γ_0，$\omega(r,t)$ 先从 0 逐渐增加，由于流体中粘性的存在，涡旋的影响随着 r 的增加逐渐减小，因此 $\omega(r,t)$ 在增加到某一值后开始减小，直至无穷远处衰减为 0，曲线总的变化趋势与文献[25]中的经典二阶流体是一致的。从图 2-1 中还可以看出，β 越大，曲线的变化越剧烈，即速度的最大值越大，达到速度最大值所对应的距离 r 越小，随后速度衰减越快。可见，β 越大，流体的弹性效应越强，越接近于经典二阶流体，当 β=1 时，完全化为经典二阶流体；反之，β 越小，流体的粘性效应则越强，当 β=0 时，完全化为粘性牛顿流体。图 2-2 主要体现了时间 t 对涡流速度分布曲线的影响，从图中可以看出，随着时间的推移，同一位置的涡流速度逐渐减小，这是由于流体中存在粘性的作用。

图 2-3、图 2-4 是不同参数下，温度场 $\theta(r,t)$ 随空间变量 r 的增加而衰减的变化曲线。图 2-3 给出了分数阶扩散指数 β 对温度场衰减的影响，从图中可以看出，β 越大，温度随 r 的增加而衰减的速度越快，流体的弹性效应越明显，反之，β 越小，温度衰减的速度越慢，流体的粘性效应则越强。图 2-4 是不同时刻温度场随 r 的衰减曲线，从图中可以看出，随着时间的延续，温度场衰减越来越缓慢，这是由于流体中存在的粘性效应和涡流的性质。

图 2-5 和图 2-6 分别给出了在空间距离 r=0.1 的位置，涡流速度 $\omega(r,t)$ 和温

度场$\theta(r,t)$随时间 t 的衰减曲线，结合前面四幅图我们不难发现，当时间 t 和空间坐标 r 增大到一定值后，无论是速度场还是温度场都开始衰减，直至衰减为零，这说明流体的粘弹性不利于速度和温度的传播。

本节运用分数阶微积分运算，将经典的粘性牛顿流体和二阶流体推广到带分数阶导数的广义二阶流体，求解了广义二阶流体涡流速度的衰减和温度扩散，所得的结果更具有广泛性，这对进一步研究粘弹性流体的力学性质提供了新的途径。

第三节 受热的广义二阶流体的 Rayleigh-Stokes 问题

§ 3.1 研究背景

带有热平面的 Stokes 第一问题和带有热边界的 Rayleigh-Stokes 问题因为在实际中的重要性而倍受关注[28,29]。对于牛顿流体，Stokes[30]利用相似率求出了精确解，然而对于二阶流体，严格的相似解法并不存在[31]。此外，二阶流体的运动方程要比 N-S 方程高一阶，因此，传统的粘附边界条件显然是不够的。Rajagopal 首先发现了此问题并给出了一些精确解[4,32-36]。近来，Fetecau 又将这些结果扩展到受热的二阶流体中[37]。

本节主要研究了考虑内摩擦的情况下，受热的广义二阶流体的流动。为了描述广义二阶流体的速度场和温度场，我们依然引入了分数阶微积分，利用(1-9)式的本构关系，解出了带有热平面的广义二阶流体的 Stokes 第一问题和带有热边界的广义二阶流体的 Rayleigh-Stokes 问题的速度场和温度场。通过对流动方程的空间变量做 Fourier 正弦变换，对时间变量做分数阶导数的 Laplace 变换，利用离散逆 Laplace 变换技巧和广义 Mittag-Leffler 函数，对于β为任意分数时得到了流动的精确解。一些前人所得到的结果均可作为本文结果的特例而出现，比如 Fetecau 等人[37]有关加热的二阶流体运动的解，粘性牛顿流体的 Stokes 第一问题的经典解等。

§ 3.2 带有热平面的广义二阶流体 Stokes 第一问题

3.2.1 速度场

我们考虑在(y,z)方向无限大平面上面的广义二阶粘弹性流体的流动[15]。流体开始处于静止状态，假定在$t=0^+$时刻，平面突然以速度U沿 y 方向启动，速度场可表示为：

$$\mathbf{V}=u(x,t)\mathbf{j} \tag{3-1}$$

这里 u 是沿 y 坐标方向的速度， $\boldsymbol{j}$ 是 y 方向的单位向量。

将(3-1)式带入(1-9)中， 可将应力分量表示为：

$$T_{xy}=T_{yx}=\mu\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\alpha_1 D_t^{\ \beta}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{3-2}$$

其它应力分量均为零. 将(3-1) ，(3-2) 式代到 (1-7)式中，可得：

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=(\nu+\alpha D_t^{\ \beta})\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{3-3}$$

其中 $\nu=\mu/\rho,\alpha=\alpha_1/\rho$

相应的初条件和边条件为：

$$u(x,0)=0 \qquad x>0 \tag{3-4}$$

$$u(0,t)=U \qquad t\ge 0 \tag{3-5}$$

同时满足自然边条件：

$$u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\to 0 \quad \text{当}\ x\to 0 \tag{3-6}$$

引入无量纲参数：$u^*=\dfrac{u}{U},x^*=\dfrac{xU}{\nu},t^*=\dfrac{tU^2}{\nu},\eta=\dfrac{\alpha U^2}{\nu^2}$，这里 U 和ν/U^2分别代表特征速度和时间，算子$D_t^{\ \beta}$具有分数阶时间量纲$[\nu/U^2]^{-\beta}$[15]。由以上分析可得如下无量纲分数阶方程和定解条件（为简单起见，以下省略右上角无量纲记号“*”)：

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=(1+\eta D_t^{\ \beta})\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{3-7}$$

$$u(x,0)=0 \qquad x>0 \tag{3-8}$$

$$u(0,t)=1 \qquad t\ge 0 \tag{3-9}$$

$$u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\to 0 \quad \text{当}\ x\to 0 \tag{3-10}$$

为了对方程精确求解，我们引入 Fourier 正弦变换[38]：

正变换为： $$U(\xi,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,t)\sin(x\xi)dx=F_s\{u(x,t)\} \tag{3-11}$$

逆变换为： $$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty U(\xi,t)\sin(x\xi)d\xi=F_s^{\ -1}\{U(\xi,t)\} \tag{3-12}$$

对（3-7）和（3-8）式使用 Fourier 正弦变换(3-11)式，并利用(3-9)、(3-10)式，可以得到

$$\frac{dU(\xi,t)}{dt}=-\xi^2(1+\eta D_t^{\ \beta})U(\xi,t)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\xi \tag{3-13}$$

$$U(\xi,0)=0 \tag{3-14}$$

这里用到 Fourier 正弦变换的重要性质[38]：

$$F_s\{f''(x)\} = -\xi^2 F_s\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\xi f(0) \tag{3-15}$$

设 $\overline{U}(\xi,s) = L\{U(\xi,t)\} = \int_0^\infty e^{-st}U(\xi,t)dt$ 是$U(\xi,t)$的象函数，s 是变换参数，利用序贯分数阶导数[24]的 Laplace 变换，可得：

$$\overline{U}(\xi,s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\xi}{s(s+\eta\xi^2 s^\beta + \xi^2)} \tag{3-16}$$

为了求得$\overline{U}(\xi,s)$的逆 Laplace 变换，这里仍然采用离散逆 Laplace 变换技巧，将(3-16)式右端展为 Taylor 级数如下：

$$\overline{U}(\xi,s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\xi\cdot\frac{1}{s}\times\frac{1}{s+\eta\xi^2 s^\beta+\xi^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\xi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\xi^{2(k+1)}\frac{s^{-\beta k-\beta-1}}{(s^{1-\beta}+\eta\xi^2)^{k+1}} \tag{3-17}$$

对(3-17)式逐项求逆 Laplace 变换，可得：

$$U(\xi,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\xi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\xi^{2(k+1)}t^{k+1}E_{1-\beta,2+\beta k}{}^{(k)}(-\eta\xi^2 t^{1-\beta}) \tag{3-18}$$

其中 $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$ 是广义 Mittag-Leffler 函数[24]，在获得（3-18）式的过程中利用了广义 MIittag-Leffler 函数的 Laplace 逆变换的一个重要公式（见第二节(2-21)式）。

对（3-18）式做 Fourier 正弦逆变换，利用逆变换表达式(3-12)，可得速度场的精确解：

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin(\xi x)}{\xi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\xi^{2(k+1)}t^{k+1}E_{1-\beta,2+\beta k}{}^{(k)}(-\eta\xi^2 t^{1-\beta})d\xi \tag{3-19}$$

特别的，当β=1 时，方程(3-17) 可简化为

$$\overline{U}(\xi,s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\xi}{s(s+\eta\xi^2 s+\xi^2)} \tag{3-20}$$

对(3-20)式的 s 和ξ分别做 Laplace 逆变换和 Fourier 正弦逆变换后，很容易得到[37]：

$$u(x,t) = 1-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin(\xi x)}{\xi}\exp(-\frac{\xi^2}{1+\eta\xi^2}t)d\xi \tag{3-21}$$

将(3-21)转化为有量纲的形式，就可以得到 Fetecau 等人有关二阶流体的速度解[37]。

若令 β=0 且 α_1=0，则变成了经典牛顿流体的 Stokes 第一问题，方程(3-19)可简化为：

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{s}(1-\exp(-\xi^2 t)\sin(\xi x)d\xi \\ =1-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{s}\exp(-\xi^2 t)\sin(\xi x)d\xi \tag{3-22}$$

(3-22)式亦可写为如下形式[37]：

$$u(y,t)=1-erf(\frac{y}{2\sqrt{t}}) \tag{3-23}$$

其中 $erf(y)$ 是 Gauss 误差函数，这就是经典牛顿流体著名的 Stokes 第一问题。

3.2.2 温度场

根据 Fourier 定律，温度场的控制方程可写为如下形式[37]：

$$\frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\nu}{c}[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}]^2+\frac{r(x,t)}{\rho c}=\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} \tag{3-24}$$

这里 $\theta=\theta(x,t)$ 是温度场，$u(x,t)$ 是由(3-19)式给出的速度场，c 为比热，k 为热传导率，ρ 为流体密度，均为常数。$r(x,t)$ 为辐射热，本文中不考虑辐射传热，将 $r(x,t)$)取为 0。从形式上看，(3-24)式与牛顿粘性流体及经典二阶流体的能量方程是相同的，然而，由于式中涉及到的速度 $u(x,t)$是广义二阶流体的速度，不同于牛顿粘性流体和经典二阶流体，故由(3-24)式得出的温度场 $\theta(x,t)$ 与其也会不同。

相应的初条件和边条件：

$$\theta(x,0)=0 \qquad x>0 \tag{3-25}$$

$$\theta(0,t)=T_0 \qquad t\ge 0 \tag{3-26}$$

自然边条件：

$$\theta(x,t),\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\to 0,\quad \text{当 } x\to 0 \tag{3-27}$$

引入无量纲参数：$\theta^*=\frac{\theta}{T_0},v^*=\frac{u}{U},x^*=\frac{xU}{\nu},t^*=\frac{tU^2}{\nu},\eta_1=\frac{U^2}{cT},\Pr=\frac{c\mu}{k}$，则(3-24) ~ (3-27)式可化为（以下为简便记，省略右上角“*”）：

$$\frac{1}{\Pr}\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}+\eta_1[\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}]^2=\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} \tag{3-28}$$

$$\theta(x,0)=0 \qquad x>0 \tag{3-29}$$

$$\theta(0,t)=1 \qquad t\ge 0 \tag{3-30}$$

$$\theta(x,t),\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\to 0 \quad \text{当 } x\to 0 \tag{3-31}$$

令 $g(x,t)=\eta_1[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}]^2$， (3-28)式可写为：

$$\frac{1}{\Pr}\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}+g(x,t)=\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} \tag{3-32}$$

对（3-29）和（3-32）式运用 Fourier 正弦变换，并利用（3-15）及（3-30）、（3-31）式，可得到：

$$\frac{d\theta_s(\xi,t)}{dt}+\frac{1}{\Pr}\xi^2\theta_s(\xi,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\Pr}\xi+g_s(\xi,t) \tag{3-33}$$

$$\theta_s(\xi,0)=0,\qquad \xi>0 \tag{3-34}$$

其中 $\theta_s(\xi,t)$ 和 $g_s(\xi,t)$ 分别是 $\theta(x,t)$ 和 $g(x,t)$ 的 Fourier 正弦变换。由(3-33)，(3-34) 式可解出：

$$\theta_s(\xi,t)=e^{-\xi^2 t/\Pr}\cdot\int_0^t[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\Pr}\xi+g_s(\xi,\tau)]e^{\xi^2\tau/\Pr}d\tau \tag{3-35}$$

对（3-35）式应用 Fourier 正弦逆变换，便可得到温度场分布：

$$\theta(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\sin(\xi x)e^{-\xi^2 t/\Pr}\cdot\int_0^t[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\Pr}\xi+g_s(\xi,\tau)]e^{\xi^2\tau/\Pr}d\tau d\xi \tag{3-36}$$

§ 3.3 带有热边界的广义二阶流体的 Rayleigh-Stokes 问题

3.3.1 速度场

我们考虑具有直角矩形无限大边界($x\geq 0,-\infty<y<\infty,z\geq 0$)广义二阶粘弹性流体[15]。流体开始处于静止状态，假定在 $t=0^+$ 时刻，边界突然以速度 U 沿 y 方向启动，速度场可表示为：

$$\mathbf{V}=u(x,z,t)\mathbf{j} \tag{3-37}$$

同 **3.2.1** 类似，动量方程可简化为：

$$\frac{\partial u(x,z,t)}{\partial t}=(\nu+\alpha D_t^{\beta})(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})u(x,z,t) \tag{3-38}$$

其中 $\nu=\mu/\rho,\alpha=\alpha_1/\rho$

初条件及边条件：

$$u(x,z,0)=0,\qquad x>0,z>0 \tag{3-39}$$

$$u(0,z,t)=u(x,0,t)=U,\qquad t\geq 0 \tag{3-40}$$

自然边条件：

$$u(x,z,t),\frac{\partial u(x,z,t)}{\partial x},\frac{\partial u(x,z,t)}{\partial z}\to 0\quad 当\quad x^2+z^2\to 0 \tag{3-41}$$

无量纲参数选取如下：$u^*=\frac{u}{U},x^*=\frac{xU}{\nu},z^*=\frac{zU}{\nu},t^*=\frac{tU^2}{\nu},\eta=\frac{\alpha U^2}{\nu^2}$，则由

方程（3-38）~（3-41）式可得如下无量纲分数阶方程和定解条件（为简单起见，以下省略右上角无量纲记号“*”）：

$$\frac{\partial u(x,z,t)}{\partial t}=(1+\eta D_t^{\ \beta})(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})u(x,z,t) \tag{3-42}$$

$$u(x,z,0)=0 \qquad x>0 \tag{3-43}$$

$$u(0,z,t)=u(x,0,t)=1 \qquad t\geq 0 \tag{3-44}$$

$$u(x,z,t),\frac{\partial u(x,z,t)}{\partial x},\frac{\partial u(x,z,t)}{\partial z}\to 0 \quad 当 \quad x^2+z^2\to 0 \tag{3-45}$$

为了对方程精确求解，我们引入二维 Fourier 正弦变换[38]：

正变换：$$U(\xi,\varsigma,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty u(x,z,t)\sin(\xi x)\sin(\varsigma z)dxdz=F_s\{u(x,z,t)\} \tag{3-46}$$

逆变换：$$u(x,z,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty U(\xi,\varsigma,t)\sin(\xi x)\sin(\varsigma z)d\xi d\varsigma=F_s^{\ -1}\{U(\xi,\varsigma,t)\} \tag{3-47}$$

对（3-42）、(3-43)式的 x , z 变量作 Fourier 正弦变换，并利用（3-44）、（3-45）式，可将原方程组可化为：

$$\frac{dU(\xi,\varsigma,t)}{dt}=-(1+\eta D_t^{\ \beta})(\xi^2+\varsigma^2)U(\xi,\varsigma,t)+\frac{2}{\pi}\frac{(\xi^2+\varsigma^2)}{\xi\varsigma} \tag{3-48}$$

$$U(0)=0 \tag{3-49}$$

这里用到二维 Fourier 正弦变换的重要性质[38]：

$$F_s\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\}=-(\xi^2+\varsigma^2)U+\frac{2}{\pi}\frac{(\xi^2+\varsigma^2)}{\xi\varsigma} \tag{3-51}$$

设 $\overline{U}(\xi,\varsigma,s)=L\{U(\xi,\varsigma,t)\}=\int_0^\infty e^{-st}U(\xi,\varsigma,t)dt$ 是 $U(\xi,\varsigma,t)$ 的象函数，s 是变换参数，利用序贯分数阶导数[24]的 Laplace 变换，可得：

$$\overline{U}(\xi,\varsigma,s)=\frac{2(\xi^2+\varsigma^2)}{\pi\xi\varsigma s[s+\eta(\xi^2+\varsigma^2)s^\beta+(\xi^2+\varsigma^2)]} \tag{3-52}$$

为了求得 $\overline{U}(\xi,\varsigma,s)$ 的 Laplace 逆变换，这里采用离散逆 Laplace 变换技巧，将(3-52)式右端展为 Taylor 级数，则有：

$$\begin{aligned}\overline{U}(\xi,\varsigma,s)&=\frac{2(\xi^2+\varsigma^2)}{\pi\xi\varsigma}\cdot\frac{1}{s}\times\frac{1}{s+\eta(\xi^2+\varsigma^2)s^\beta+(\xi^2+\varsigma^2)}\\&=\frac{2}{\pi\xi\varsigma}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\xi^2+\varsigma^2)^{k+1}\frac{s^{-\beta k-\beta-1}}{[s^{1-\beta}+\eta(\xi^2+\varsigma^2)]^{k+1}}\end{aligned} \tag{3-53}$$

对上式逐项求 Laplace 逆变换，可得：

$$U(\xi,\varsigma,t)=\frac{2}{\pi\xi\varsigma}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(\xi^2+\varsigma^2)^{k+1}t^{k+1}E_{1-\beta,2+\beta k}^{\ (k)}[-\eta(\xi^2+\varsigma^2)t^{1-\beta}] \tag{3-54}$$

对（3-54）式做 Fourier 正弦逆变换，利用逆变换表达式(3-47)，可得速度场的精确解：

$$u(x,z,t)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\sin(\xi x)\sin(\varsigma z)}{\xi\varsigma}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!}(\xi^2+\varsigma^2)^{k+1}t^{k+1}E_{1-\beta,2+\beta k}{}^{(k)}[-\eta(\xi^2+\varsigma^2)t^{1-\beta}]d\xi d\varsigma \tag{3-55}$$

特别的，如令 $\beta=1$，(3-52) 式可简化为：

$$\overline{U}(\xi,\varsigma,s)=\frac{2(\xi^2+\varsigma^2)}{\pi\xi\varsigma s[s+\eta(\xi^2+\varsigma^2)s+(\xi^2+\varsigma^2)]} \tag{3-56}$$

对（3-56）式中的 s 和 ξ,ς 分别做 Laplace 逆变换和 Fourier 正弦逆变换，可得：

$$u(x,z,t)=1-\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{\sin(\xi x)}{\xi}\int_0^\infty\frac{\sin(\varsigma z)}{\varsigma}\times\exp(-\frac{\xi^2+\varsigma^2}{1+\eta(\xi^2+\varsigma^2)}t)d\varsigma d\xi \tag{3-57}$$

将(3-57)转化为有量纲的形式，就可以得到 Fetecau 等人有关二阶流体的速度解[37]。

3.3.2 温度场

能量方程可写为[37]：

$$\frac{k}{\rho c}[\frac{\partial^2\theta(x,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta(x,z,t)}{\partial z^2}]+\frac{\nu}{c}\{[\frac{\partial u(x,z,t)}{\partial x}]^2+[\frac{\partial u(x,z,t)}{\partial z}]^2\}+\frac{r(x,z,t)}{\rho c}=\frac{\partial\theta(x,z,t)}{\partial t} \tag{3-58}$$

这里 $\theta=\theta(x,z,t)$ 是温度场，$u(x,z,t)$ 是由(3-55)式给出的速度场，$r(x,z,t)$ 为辐射热，在以下的计算中略去。

初条件和边条件：

$$\theta(x,z,0)=0 \qquad x>0 \tag{3-59}$$

$$\theta(0,z,t)=\theta(x,0,t)=T_0 \qquad t\ge 0 \tag{3-60}$$

自然边条件：

$$\theta(x,z,t),\frac{\partial\theta(x,z,t)}{\partial x},\frac{\partial\theta(x,z,t)}{\partial z}\to 0 \quad 当 \quad x^2+z^2\to 0 \tag{3-61}$$

选取无量纲参数如下：

$$\theta^*=\frac{\theta}{T_0},v^*=\frac{u}{U},x^*=\frac{xU}{\nu},z^*=\frac{zU}{\nu},t^*=\frac{tU^2}{\nu},\eta_1=\frac{U^2}{cT},\mathrm{Pr}=\frac{c\mu}{k}$$

略去“*”，方程可化为：

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}}[\frac{\partial^2\theta(x,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta(x,z,t)}{\partial z^2}]+\eta_1\{[\frac{\partial u(x,z,t)}{\partial x}]^2+[\frac{\partial u(x,z,t)}{\partial z}]^2\}=\frac{\partial\theta(x,z,t)}{\partial t} \tag{3-62}$$

$$\theta(x,z,0)=0, \qquad x>0,z>0 \tag{3-63}$$

$$\theta(0,z,t)=\theta(x,0,t)=1, \qquad t\ge 0 \tag{3-64}$$

$$\theta(x,z,t), \frac{\partial\theta(x,z,t)}{\partial x}, \frac{\partial\theta(x,z,t)}{\partial z} \to 0 \quad 当 \quad x^2+z^2 \to 0 \tag{3-65}$$

令 $g(x,z,t)=\eta_1\{[\frac{\partial u(x,z,t)}{\partial x}]^2+[\frac{\partial u(x,z,t)}{\partial z}]^2\}$，(3-62) 式可化为：

$$\frac{1}{\Pr}[\frac{\partial^2\theta(x,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta(x,z,t)}{\partial z^2}]+g(x,z,t)=\frac{\partial\theta(x,z,t)}{\partial t} \tag{3-66}$$

对（3-63）、（3-66）作 Fourier 正弦变换，设 $\theta_s(\xi,\varsigma,t)=F_s\{\theta(x,z,t)\}$，并利用（3-51）式及（3-64）、（3-65）式，可得：

$$\frac{d\theta_s(\xi,\varsigma,t)}{dt}+\frac{1}{\Pr}(\xi^2+\varsigma^2)\theta_s(\xi,\varsigma,t)=\frac{2}{\pi\Pr}\frac{\xi^2+\varsigma^2}{\xi\varsigma}+g_s(\xi,\varsigma,t) \tag{3-67}$$

$$\theta_s(0)=0 \tag{3-68}$$

其中 $$g_s(\xi,\varsigma,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty g(x,z,t)\sin(\xi x)\sin(\varsigma z)dxdz \tag{3-69}$$

从(3-67)、(3-68)可解得：

$$\theta_s(\xi,\varsigma,t)=e^{-(\xi^2+\varsigma^2)t/\Pr}\cdot\int_0^t[\frac{2}{\pi\Pr}\frac{\xi^2+\varsigma^2}{\xi\varsigma}+g_s(\xi,\varsigma,\tau)]e^{(\xi^2+\varsigma^2)\tau/\Pr}d\tau \tag{3-70}$$

对上式作 Fourier 正弦逆变换，可求得温度场：

$$\theta(x,z,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\sin(\xi x)\sin(\varsigma z)e^{-(\xi^2+\varsigma^2)t/\Pr}\cdot\int_0^t[\frac{2}{\pi\Pr}\frac{\xi^2+\varsigma^2}{\xi\varsigma}+g_s(\xi,\varsigma,\tau)]e^{(\xi^2+\varsigma^2)\tau/\Pr}d\tau d\xi d\varsigma \tag{3-71}$$

§ 3.4 结论

本节将分数阶微积分运算引入到广义二阶流体的本构关系中，并研究了受热平面及受热边界影响下的广义二阶流体的运动情况和温度扩散。通过运用分数阶导数的 Fourier 正弦变换和离散 Laplace 变换理论求得了速度场和温度场的精确解。比起传统的研究粘弹性流体的那些模型，分数阶本构关系模型更具广泛性。

第四节 总　结

近年来，作为分形几何和分数维的动力学基础，分数阶微积分在研究粘弹性体方面获得了成功，日益倍受关注。附录 II 运用分数阶微积分运算，将经典的粘性牛顿流体和二阶流体推广到带分数阶导数的广义二阶流体，建立了带分数阶导数的广义二阶流体模型，分别研究了广义二阶流体涡流速度的衰减和温度扩散以及带有热边界的广义二阶流体 Rayleigh-Stokes 问题。

对于带有涡流运动的广义二阶流体，导出了对时间具有分数阶导数的运动方

程，即运动的控制方程是分数阶的偏微分方程，并利用分数阶导数的 Laplace 变换和 Hankel 变换，得到了涡流速度场和温度场的精确解。

同时研究了受热平面影响下的广义二阶流体的 Stokes 第一问题及受热边界影响下的广义二阶流体 Rayleigh-Stokes 问题的运动情况和温度扩散。同样导出了对时间具有分数阶导数的运动方程，然后通过运用分数阶导数的 Fourier 正弦变换和离散 Laplace 变换理论求得了速度场和温度场的精确解。

所得的新结果因涵盖了整数阶和分数阶两种情况，所以更具有广泛性, 这为进一步研究粘弹性流体的力学性质提供了一种新的途径。

参考文献

[1] Choi J. J., Rusak Z., Tichy J.A., Maxwell fluid suction flow in a channel, J. Non-Newtonian Fluid Mech, 1999, 85:165-187.

[2] Makris N., Theoretical and experimental investigation of viscous dampers in applications of seismic and vibration isolation, PhD thesis, State Univ. Of New York at Buffalo, Buffalo, N.Y, 1991.

[3] Makris N., Constantinou M.C., Fractional derivative model for viscous dampers, J. Struct. Eng., ASCE, 1991, 117:2708-2724.

[4] Rajagopal K.R., A note on unsteady unidirectional flows of a non-Newtonian fluid, Int. J. Non-Linear Mechanics, 1982, 17:369-373.

[5] Erdogan M. E., Plane surface suddenly set in motion in a non-Newtonian fluid, Acta Mechanica, 1995, 108:179-187.

[6] Rajagopal K.R., K. R. Bhatnagar, Exact solutions for some simple flows of an Oldroyd-B fluid, Acta. Mechanica, 1995, 113: 233-239.

[7] Hayat T., Siddiqui A.M., Asghar S., Some simple flows of an Oldroyd-B fluid, International J. of Eng. Sci., 2001, 39: 135-147.

[8] 黄军旗，何光渝，刘慈群，双筒流变仪中广义二阶流体运动分析，中国科学(A辑)，1996，26(10): 912-920

[9] 徐明瑜，谭文长，广义二阶流体分数阶反常扩散速度场、应力场及涡旋层的理论分析，中国科学(A辑)，2001，31(7): 626-638.

[10] 谭文长，鲜峰，魏兰. 广义二阶流体非定常Couette流动的精确解. 北京 科学通报. 2002, 47(16): 1226-1229

[11] Tan Wenchang, Xu Mingyu. The impulsive motion of flat plate in a general second grade fluid. Mechanics Research Communication. 2002, 29(1): 3-9

[12] Tan Wenchang, Xu Mingyu. Plane surface suddenly set in motion in a viscoelasticfluid with fractional Maxwell model. ACTA Mechanica Sinica. 2002, 18(4): 342-349

[13] Tan Wenchang, Pan Wenxiao, Xu Mingyu. A note on unsteady flows of a viscoelastic fluid with the fractional Maxwell model between two parallel plates. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2003，38(5)：645-650

[14] 沈芳，谭文长，赵耀华等. 广义二阶流体涡流速度的衰减和温度扩散. 应用数学和力学 （已接收）

[15] Shen Fang, Tan Wenchang, Zhao Yaohua. The Rayleigh-Stokes problem for a heated generalized second grade fluid with fractional derivative model. (Submitted to *International*

Journal of Non-Linear Mechanics)

[16] Palade L.I., Attane P., Huilgol R.R., Mena B., Anomalous stability behavior of a properly invariant constitutive equation which generalizes fractional derivative models, International J. of Eng. Sci., 1999, 37:315-329.

[17] Friedrich C., Relaxation and retardation function of the Maxwell model with fractional derivative, Rheology Acta, 1991, 30: 151-158.

[18] Rossihin Y.A., M.V. Shitikova, A new method for solving dynamic problems of fractional derivative viscoelasticity, International J. of Eng. Sci., 2001, 39: 149-176.

[19] Makris N., Dargush G.F., Constantinou M.C. Dynamic analysis of generallized viscoelastic fluids, J. Eng. Mechanics, 1993, 119: 1663-1679.

[20] SONG Daoyun, SONG Xingfu, JIANG Tiqian, etc, Study of Rheological Characterization of Fenugreek Gum with Modified Maxwell Model, Chinese J. Of Chem. Eng., 2000, 8(1): 85-88.

[21] Siddiqui, A,M., Hayat, T., Asghar, S., Periodic flows of a non-Newtonian fluid between two parallel plates. International Journal of Non-Linear Mechanics. 1999, 34: 895-899

[22] Ghosh, N.C., Ghosh, B.C., Debnath, L., The Hydromagnetic Flow of a Dusty Visco-Elastic Fluid Between Two Infinite Parallel Plates**.** Computers and Mathematics with Applications. 2000, 39: 103-116

[23] Bagley R L. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology*. 1983, 27: 201-210

[24] Podlubny I. Fractional differential equations. *San Diego: Academic Press*: 1999, 1-303

[25] C. Fatecau, Corina Fetacau, J. Zierep. Decay of a potential vortex and propagation of a heat wave in a second grade fluid. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2002, 37(6): 1051-1056

[26] Paradisi P, Cesari R, Mainardi R, et al. The fractional Fick’s law for non-local transport processes. Physica A. 2001, 293(1): 130-142

[27] 奥齐西克．热传导．俞昌铭译．北京　高等教育出版社　1983, 563-715

[28] J. Zierep. Similarity Laws and Modeling. Marcel Dekker, Inc., New York. 1971

[29] J. Zierep. Das Rayleigh-Stokes Problem für die Ecke. Acta Mechanics. 1979, 34: 161-165

[30] Schlichting H., Gersten K. Boundary layer theory. 8th Edition, Springger, Berlin. 2000

[31] Taipel I. The impulsive motion of a flat plate in a viscoelasitic fluid. Acta Mech. 1981, 39: 277-279

[32] Rajagopal K.R., On the decay of vortices in a second grade fluid, Meccanica. 1980, 9: 185－188

[33] Rajagopal K.R., A.S. Gupta, On a class of exact solutions to the equations of motion of a second grade &uid, Int. J. Eng. Sci. 1981, 19: 1009 – 1014

[34] Rajagopal K. R., Gupta A.S. An exact solution for the flow of a non-newtonian fluid past an infinite porous plate. Meccanica, 1984, 19: 1948-1954

[35] Rajagopal K.R. On the creeping flow of the second order fluid. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1984, 15: 239-244

[36] Bandelli R., Rajagopal K. R. Start-up flows of second grade fluids in domains with one finite dimension. Int. J. Non-Linear Mechanics. 1995, 30: 817-823

[37] C. Fetecau, Corina Fetecau. The Rayleigh-Stokes problem for heated second grade fluids. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2002, 37: 1011-1015

[38] 杜珣，唐世敏．数学物理方法．北京　高等教育出版社　1990, 232-262

.

致 谢

在这篇论文完成之际，我首先要感谢我的前任导师严宗毅教授。在他指导我的专业学习和论文研究工作的三年里，严宗毅教授渊博的学识、严谨的科学风范、特别是勤奋的敬业精神和不知疲倦的工作作风，时时刻刻熏陶和鼓励着我，成为我从事研究工作的动力和不懈追求的目标。特别令我敬佩和感动的是，在严老师去世前近一年内身患重病的情况下，仍然忘我地工作，以乐观和顽强的精神同疾病斗争。这种精神无论是在现在和将来，都必将深深地感染和激励着我。

另外，本论文能得以顺利完成是与我的现任导师吴望一教授的精心指导和亲切关怀分不开的。非常感谢吴望一教授将我领入一个崭新且具有开创性的研究领域，吴老师渊博的理论知识、丰富的学术经验、严谨的治学态度和勇于创新的学术思想在一点一滴的言传身教中使我不断进步。在这两年的具体的工作中，吴望一教授投入了大量的精力，从问题的提出，模型的建立，公式的推导以及论文的定稿，吴老师都给予我极大的帮助。作者还得到了温功碧教授的许多指导和大力帮助，温老师在数值计算方面扎实的功底使我收益匪浅。两位老师对作者在生活上也是无微不至的关心和帮助着，作者在此对两位老师多年的关怀、指导和帮助表示衷心的感谢。

我还要感谢同在生物力学组的谭文长副教授。在严宗毅教授病重及去世的那段日子里，谭老师给予了我深切的关怀、热情的鼓励和悉心的指导，他深厚的理论根基和敏锐的思维极大地启发和开阔了我的研究思路。在本文工作的最后阶段，谭文长副教授在百忙中密切关注论文的进展，提出了宝贵的建议。衷心地感谢谭文长副教授。

还要特别感谢北京大学医学部解剖学与组织胚胎学系张卫光老师，本文的实验工作都是在他的指导下完成的。张卫光老师对科研工作的热情和投入深深地感染了我，他深厚的知识基础和丰富的实验经验让我获益匪浅。在此表示诚挚的谢意。

本文的实验工作是与潘文潇同学合作完成的，她对我的研究工作提供了无私的帮助，难忘与她团结协作、共同奋斗、同甘共苦的日日夜夜，在此表示感谢。

本课题的实验部分是在北京大学医学部基础医学院血液流变学中心以及北京大学医学部解剖学与组织胚胎学系实验室完成的。实验过程中得到实验室文宗耀教授、田珑老师和以及谢利德、姚伟娟等同学极其热情、周到的接待和大力协助，为研究工作的顺利进行提供了便利条件。在此向他们表示衷心的感谢。

本课题的数值计算部分多数是在湍流国家重点实验室的计算机群和北京大学计算中心的 IBM RS/6000 SP 高性能并行计算系统完成的。感谢湍流机群的管理员安亦然和计算中心的孙爱东老师提供的大力帮助。

同时，作者的工作是在谢文俊同学的工作基础上进行的，而且谢文俊在三维非结构网格生成方面给了我很多的指导和帮助，在此表示感谢。

感谢我们研究小组的陈伟、李俊修、刘世强、彭恒初、魏兰……与他们一起快乐的交流、切磋使我深受启发。

最后，感谢我的父母和所有关心、支持我的亲人和朋友！

博士期间已发表和待发表文章目录

1. **沈芳** 严宗毅 赵耀华 堀井清之. 气流排除倾斜管道积水的理论分析 应用数学和力学 2002, 23(6):p619-626 (**SCI, EI**)

2. **沈芳**, 严宗毅, 张卫光. 肝门静脉高压症(PHT)血液动力学研究进展. 生物医学 工程学杂志 2003, 20(2):p332-335 (**EI**)

3. **沈芳**，谭文长，赵耀华，T. Masuoka. 广义二阶流体涡流速度的衰减和温度扩散. 应用数学和力学，2003 (已接收) (**SCI, EI**)

4. **Fang Shen**, Wenchang Tan, Yaohua Zhao, T. Masuoka: The Rayleigh-Stokes problem for a heated generalized second grade fluid with fracional derivative model. 2003 (Submitted to *International Journal of Non-Linear Mechanics*)

5. 张卫光，潘文潇，**沈芳**，等. 四氯化碳大鼠肝硬化形成早期的血液流变学改变. 解剖学杂志 2004, 27 (**SCI**)

6. 张卫光，潘文潇，**沈芳**，等. 大鼠肝硬化形成早期的红细胞电泳率和红细胞膜胆固醇含量改变的研究. 中国血液流变学杂志 2003(已接收) （**国内核心**）